Table des matières

Chapitre 1

PROBABILITÉS D'UN ÉVÉNEMENT

1.1 Rappels

1.1.1 Ensemble

Un ensemble est un tout d'éléments bien déterminés et distincts.

Exemple

L'ensemble V des voyelles de l'alphabet français est : $V = \{a; e; i; o; u; y\}$.

Remarque

Un ensemble est fini lorsqu'il est vide ou lorsque le nombre des ses éléments est fini ou connu.

1.1.2 Réunion et intersection des ensembles

Soit A et B deux ensembles tels que : $A = \{1; 2; 3; 7\}$, $B = \{2; 3; 9\}$.

a) Réunion de deux ensembles finis

La réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble formé de tous les éléments de A ou de B.

Exemple

$A \cup B = \{1; 2; 3; 7; 9\}$

b) Intersection de deux ensembles finis

L'intersection de A et B est l'ensemble formé de tous les éléments communs à A et B.

Exemple

$A \cap B = \{2; 3\}$

1.1.3 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit A un ensemble fini. On appelle cardinal de l'ensemble A le nombre d'éléments que contient A. Il est noté " **Card(A)** "

Exemple

$V = \{a; e; i; o; u; y\}$, $card(V) = 6$.

Propriétés

▷ si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $Card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$
▷ si $A \cap B = \varnothing$, alors $card(A \cup B) = cardA + cardB$.
▷ $card\varnothing = 0$

<u>**Exercice**</u>

On donne $A = \{a, b, c, e, g\}$; $B = \{b, e, f\}$.

1. Calculer $A \cup B$; $A \cap B$.
2. Déterminer : $cardA$; $cardB$; $cardA \cap B$

Solution

1. Calculons $A \cup B$; $A \cap B$.
   $A \cup B = \{a, b, c, e, g, f\}$ et $A \cap B = \{b, e\}$.
2. Déterminons : $cardA$; $cardB$; $cardA \cap B$
   $cardA = 5$; $cardB = 3$ et $cardA \cap B = 2$

1.2 Le dénombrement

1.2.1 Définition

Dénombrer un ensemble fini revient à compter où à déterminer le nombre de ses éléments.

1.2.2 Les outils de dénombrement

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour dénombrer où déterminer le nombre de choix ou des tirages de $p - lments$ parmi n autres d'un ensembles A, on peut utiliser :

a) Les arrangements

On appelle arrangement de p éléments de E, tout $p - uplt$ d'éléments de E deu x à deux distincts où $1 \leq p \leq n$.
Le nombre d'arrangement de p éléments de E est : $N = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ avec $1 \leq p \leq n$ et $n! = n(n-1)(n-2)...2 \times 1$.
$n!$ lire " n factorielle "
Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$

Remarque

Lorsque cet arrangement se fait avec répétition, le nombre de ces arrangements est un $p - uplet$, on a : $N = n^p$.

b) Permutation

On appelle permutation des éléments de E un arrangement de n éléments de E.
▷ Le nombre de permutation de n éléments de E est : $N = n!$

Exemple

De combien de façon peut-on ranger quatre livres dans quatre tiroirs.
On a : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c) Combinaisons

Soit E un ensemble non vide à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E qui possède p éléments.
▷ Le nombre de combinaison de p éléments de E ayant n éléments est : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
C_n^p se lit " combinaison de p dans n "

Exemple

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6.$$

1.2.3 Principe du dénombrement

Notions des tirages

Soit E un ensemble fini ayant n éléments. Il est donc question de tirer p éléments de E avec $0 \leq p \leq n$;

a) Tirage successif avec remise

Il consiste à tirer les p éléments de E un à un mais l'élément tiré est remis dans E avant de tirer de nouveau et cela se fait p fois. L'outil du dénombrement utilisé est : $N = n^p$.

Activité 1

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec des éléments de l'ensemble $F = \{4; 5\}$ sachant qu'il y a répétition de chiffres ?

Solution

Soit N le nombre possible de ces nombres à trois chiffres.
On a : $N = 2^3 = 8$

b) Tirage successif sans remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E un à un, chaque élément tiré n'étant pas remis. L'outil du dénombrement utilisé est un arrangement de p éléments de E, $N = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Activité 2

On veut former un bureau de trois élèves (chef de classe, Adjoint, trésorier(e)) dans une classe de 10 élèves sachant que l'élève candidat ne peut se postuler pour deux postes. Calculer le nombre de bureaux possibles.

Solution

Soit N le nombre possible de ces bureaux à trois trois postes.
$N = A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3}= 720$

c) Tirage simultané

Il consiste à tirer les p éléments de E en une seule fois. L'outil du dénombrement utilisé est la combinaison de p éléments de E, le nombre de choix possible est : $N = C_{n}^{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Activité 3

On choisit simultanément au hasard deux élèves dans une urne classe de 10 élèves pour participer à un test. Calculer le nombre de duos possibles.

Solution

Soit N le nombre de ces duos possibles.
$N = C_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!2} = 45$

1.3 Vocabulaire de probabilité

1.3.1 Expérience aléatoire

C'est une situation ou une expérience dont le résultat n'est pas connu d'avance.

Exemple

Le lancer du dé, tirage de jetons ou de boules indiscernables au toucher dans une urne.

1.3.2 Univers

On appelle univers l'ensemble de tous les résultats possibles. On le note souvent par : Ω.

Exemple

Au lancer d'un dé parfait, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1.3.3 Éventualité

C'est un éléments quelconque de l'univers.

Exemple

3 est une éventualité de Ω
Dans toute la suite : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1.3.4 Événement

C'est une partie des éléments de l'univers.

Exemple

On lance un dé parfait. L'événement A " obtenir un nombre pair " est : $A = \{2; 4; 6\}$

1.3.5 Événement élémentaire

C'est un événement qui a une seule éventualité.

Exemple

On lance un dé parfait. L'événement S " obtenir un multiple de 6 " est : $S = \{6\}$

1.3.6 Événement impossible

C'est un événement qui n'a aucune d'éventualité.

Exemple

On lance un dé parfait. L'événement I " obtenir le chiffre 7 " est I=$\{\}$=$\varnothing$

1.3.7 Événement certain

C'est un événement qui se réalise toujours.

Exemple

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1.3.8 Événement contraire

Soit A un événement de l'univers Ω.
L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est un événement constitué de toute éventualité de Ω qui n'est pas dans A.

Exemple

On lance un dé parfait. L'événement A " obtenir un nombre paire " est $A = \{2; 4; 6\}$ et l'événement contraire de A est : $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.
N.B : $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

1.3.9 Événements incompatibles

Ce sont des événements qui n'ont aucune éventualité commune. Il ne peuvent se réaliser au même moment.

Exemple

Soient A=$\{2; 4; 6\}$; C=$\{3; 5\}$ où A et C sont deux événements de Ω.

1.3.10 Événement A ou B

C'est l'ensemble de toutes les éventualités qui sont dans A ou dans B. On note $A \cup B$

Exemple

On lance un dé parfait. On appelle K l'événement " obtenir un multiple de 3 " et L l'événement " obtenir un nombre premier "
$K = \{3; 6\}$; $L = \{2; 3; 5\}$
L'événement K ou L est : $K \cup L = \{2; 3; 5; 6\}$

1.3.11 Événement A et B

C'est l'ensemble de toutes les éventualités qui sont communes à A et B. On note $A \cap B$

Exemple

On lance un dé parfait. On appelle K l'événement " obtenir un multiple de 3 " et L l'événement " obtenir un nombre premier "
$K = \{3; 6\}$, $L = \{2; 3; 5\}$
L'événement K et L est $K \cap L = \{3\}$

1.4 Calcul des probabilités

1.4.1 Définition

La probabilité d'un événement A est le pourcentage de chance de sa réalisation.
On note : $p(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possible}} = \dfrac{CardA}{cardB}$ avec $0 \leq p(A) \leq 1$

1.4.2 Propriétés

$\triangleright$ $p(\Omega) = 1$
$\triangleright$ $p(\varnothing) = 0$
$\triangleright$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$\triangleright$ Si $A \cap B = \varnothing$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\triangleright$ $p(A) + p(\overline{A}) = 1$
$\triangleright$ Si $A_1, A_2, ...A_n$ sont des événements élémentaires de Ω,
alors $p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n = 1$

1.4.3 Calcul des probabilités : cas d'équiprobabilité

Il y a équiprobabilité si tout événement a la même probabilité de se réaliser.

Exemple

On lance un dé parfait.
$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

Activité

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 3 sont noires, 2 sont rouges et 5 sont jaunes. On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer :

1. Une boule noire ?
2. Une boule rouge ?
3. Une boule jaune ?

Solution

Soit N l'événement " obtenir une boule noire " ; R l'événement "obtenir une boule rouge " et J l'événement " obtenir une boule jaune "
$p(N) = \frac{3}{10}$; $p(R) = \frac{2}{10}$; $p(J) = \frac{5}{10}$

Activité

On lance un dé non pipé de 6 faces numérotés de 1 à 6.
On appelle A l'événement " obtenir un multiple de 2 " ; B l'événement " obtenir un diviseur de 6" et C l'événement " obtenir un nombre premier supérieur à 2.
Déterminer la probabilité des événements :
A ; B ; C ; $\overline{C}$; $A \cap C$; $A \cup B$ et $A \cup C$.

Solution

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
A$=\{2; 4; 6\} \Rightarrow p(A) = \frac{3}{6}$
B$=\{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow (B) = \frac{4}{6}$
C$=\{3; 5\} \Rightarrow p(C) = \frac{2}{6}$
$\overline{C}=\{1; 2; 4; 6\} \Rightarrow p(\overline{C}) = 1 - p(C) = \frac{4}{6}$
$A \cup B = \{2; 6\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{2}{6}$
$A \cap C = \varnothing \Rightarrow p(A \cap C) = 0$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\} \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$A \cup C = \{2; 3; 4; 6\}$
$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$

$= p(A) + p(C) - 0$
$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$

Activité

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes indiscernables au toucher. On considère les deux événements suivants :
A " la carte tirée est un valet " ; B " la carte tirée est un cœur "

1. (a) Décrire par une phrase les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

   (b) Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

2. (a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(AuB)$ et $p(A \cap B)$.

   (b) Trouver un événement C tel que B et C soient incompatibles.

Solution

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 valets et 8 cœurs.

1. (a) Décrivons par une phrase les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   - ▷ $A \cap B$: est l'événement tire un cœur et un valet
   - ▷ $A \cup B$: est l'événement tire un valet ou un cœur.
   - ▷ $\overline{A}$: est l'événement la carte tire n'est pas un valet.
   - ▷ $\overline{B}$: est l'événement la carte tire n'est pas un cœur.

   (b) Non les événements A et B ne pas sont compatibles.

2. (a) Calculons les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(AuB)$ et $p(A \cap B)$.
   Pour tout événement T,
   $p(T) = \dfrac{\text{Nombre de favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \dfrac{cardT}{card\Omega}.$
   $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{4}{32}$
   $p(B) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{8}{32}$
   $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{4}{32} = \dfrac{28}{32}$
   $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{8}{32} = \dfrac{24}{32}$
   $p(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card\Omega}$
   $p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = dfrac432 + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32}$
$p(A \cup B) = \dfrac{11}{32}$

(b) L'événement C qui peut être incompatible a B est :

$\ll$ la carte tirée est une pique $\gg$

$\ll$ la carte tirée est un trèfle $\gg$

$\ll$ la carte tirée est un carreau $\gg$