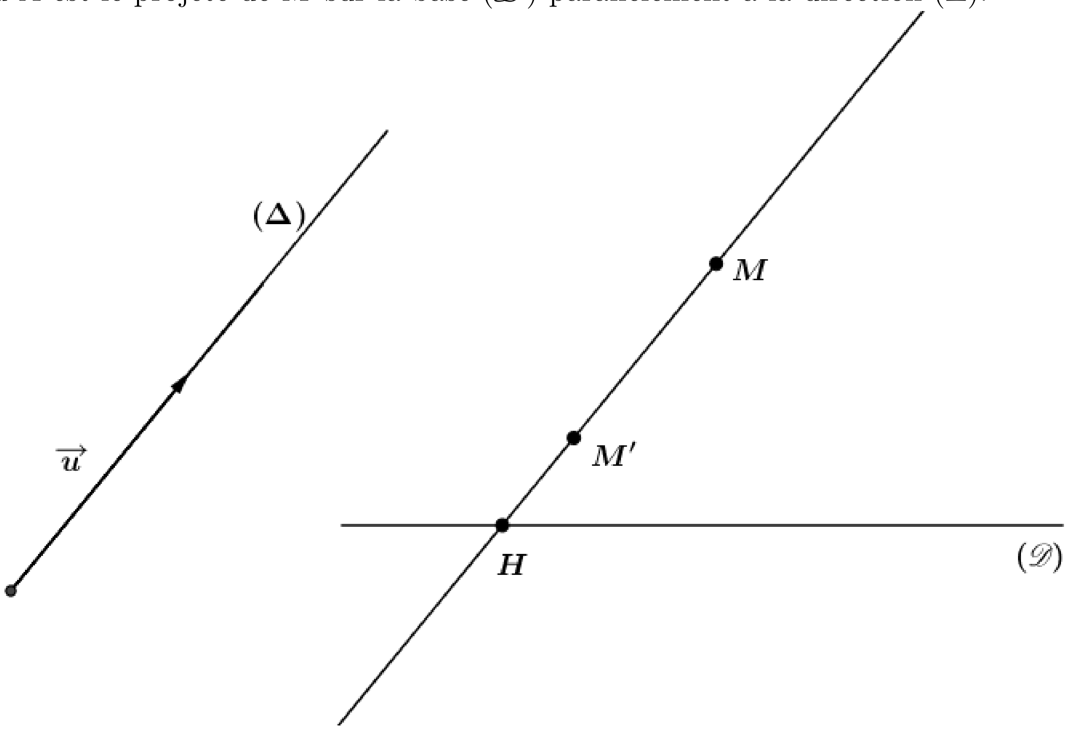
Table des matières

AFFINITÉ

1.1 AFFINITÉ DANS LE PLAN

1.1.1 Définition

Soit Δ et $(\mathscr{D})$ deux droites du plan, $k \in \mathbb{R}^{\star} - \{1\}$;
f une transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M'.
f est une affinité de rapport k, de base $(\mathscr{D})$ et de direction Δ lors que :
$\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$
Où A est le projeté de M sur la base $(\mathscr{D})$ parallèlement à la direction (Δ).



1.1.2 Éléments caractéristiques

Une affinité du plan est caractérisée par :
- Son rapport k ;
- Sa base ; $(\mathscr{D}) = \{M \in \mathscr{P} / f(M) = M'\}$
- Sa direction : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ est vecteur constant qui dirige Δ.

1.1.3 Théorème

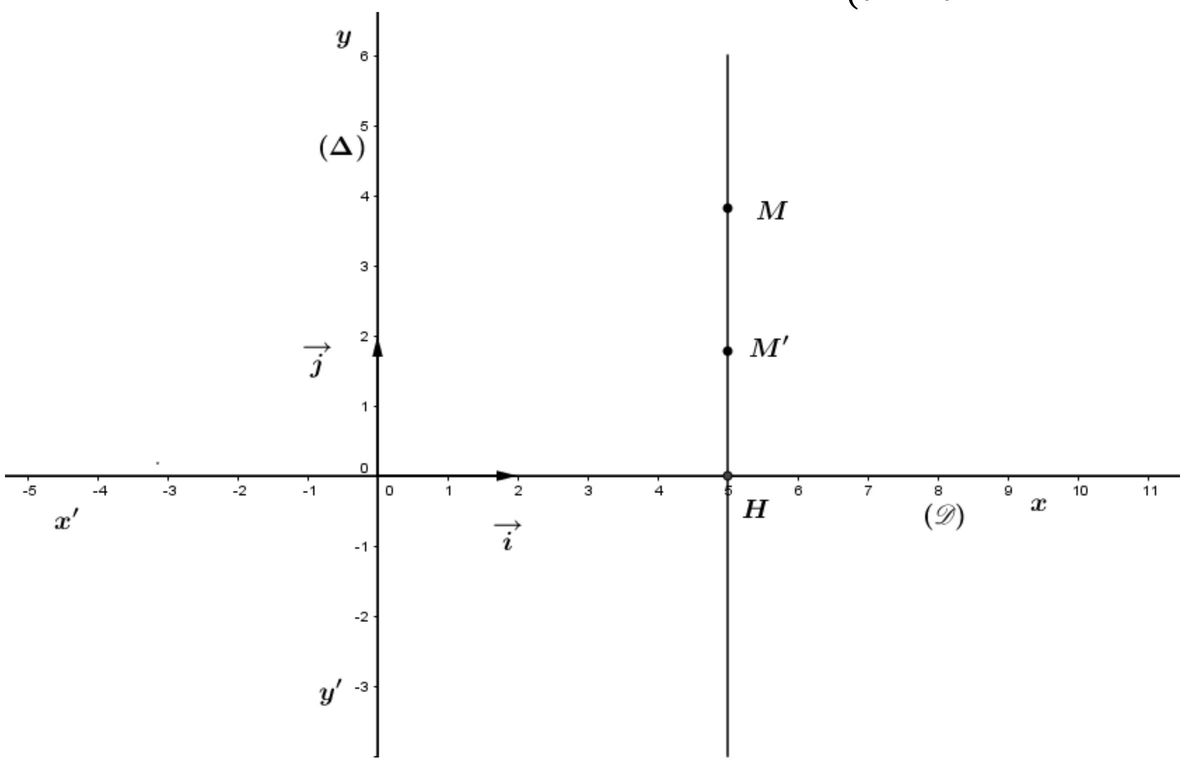
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le rapport k de l'affinité f de base $(\mathscr{D})$: $ax+by+c=0$ qui transforme le point$M(x,y)$ en $M'(x',y')$ est donné par : $k = \dfrac{\overline{HM'}}{\overline{HM}} = \dfrac{a'x+b'y+c}{ax+by+c}$ où H étant le projeté de M sur la base $(\mathscr{D})$ parallèlement à la direction (Δ).

1.1.4 Expression analytique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Trois conditions sont à vérifier :
▷ Première Condition
Déterminer une équation de la droite (MH) passant par H et parallèle à (Δ), on utilisera le $\text{dét}\left(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{u}\right) = 0$.
▷ Deuxième Condition
Trouver les coordonnées du point H intersection de la droite (MH) et $(\mathscr{D})$.
▷ Troisième Condition
Traduire analytiquement la relation $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.
Ainsi l'expression analytique de f est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax+by+c \\ y' = a'x+b'y+c' \end{cases}$
Son endomorphisme associé a pour expression analytique : $\varphi : \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = a'x+b'y \end{cases}$

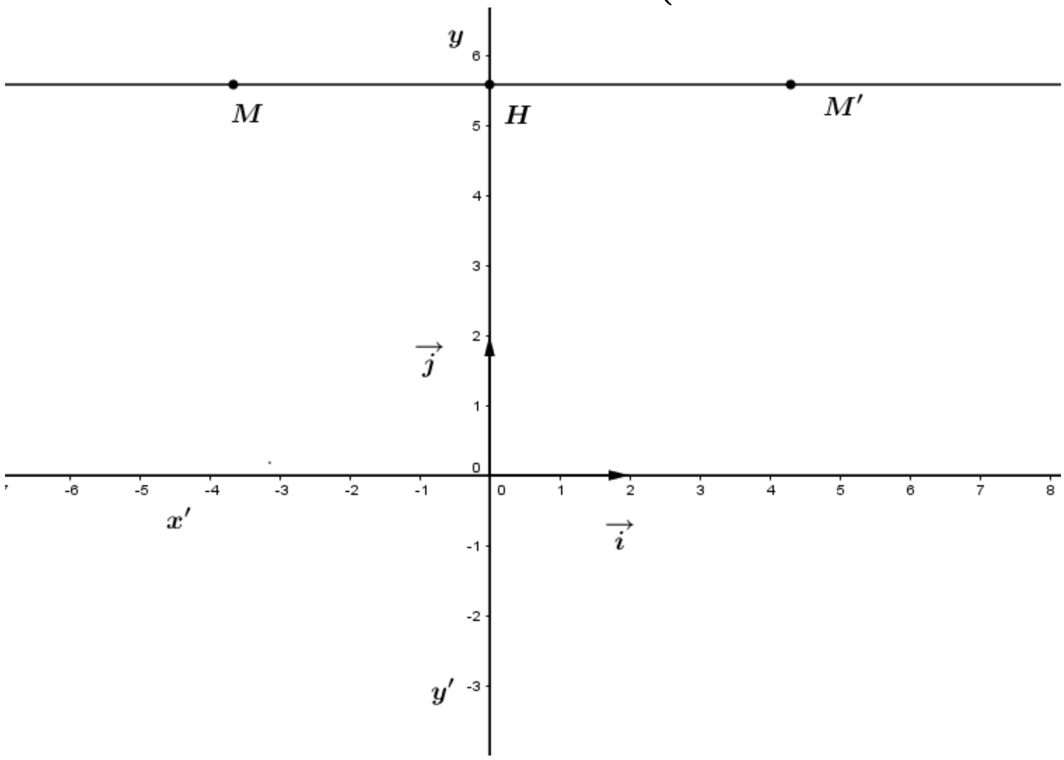
1.1.5 Cas particuliers

▷ Affinité orthogonale d'axe (ox) et de rapport k est : $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$



▷ Affinité

orthogonale d'axe (oy) et de rapport k est : $f : \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$



1.1.6 Remarques

▷ L'affinité est une application affine qui ne conserve pas les configurations.
▷ L'affinité orthogonale transforme un cercle en une ellipse.

1.2 AFFINITÉ DANS L'ESPACE

1.2.1 Définition

Soit (Δ) une droite affine et $(\mathscr{D})$ un plan vectoriel affine, $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$; f une transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M'. f est une affinité de rapport k, de base $(\mathscr{D})$ et de direction (Δ) lors que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur la base $(\mathscr{D})$ parallèlement à la direction (Δ).

1.2.2 Éléments caractéristiques

Une affinité du plan est caractérisée par :
▷ Son rapport k ;
▷ Sa base $(\mathscr{D}) = \{M \in \mathscr{E} / f(M) = M\}$;
▷ Sa direction : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\vec{u}$, $\vec{u}$ est vecteur constant qui dirige (Δ).

1.2.3 Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le rapport k de l'affinité f de base $(\mathscr{D}) : ax+by+cz+d=0$ qui transforme le point $M(x,y,z)$ en $M'(x',y',z')$ est donné par :

$k = \dfrac{\overline{HM'}}{\overline{HM}} = \dfrac{a'x + b'y + c'z + d'}{ax + by + cz + d}$
H étant le projeté de M sur la base $(\mathscr{D})$ parallèlement à la direction (Δ).

1.2.4 Expression analytique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'expression analytique de l'affinité f de rapport k, de base $(\mathscr{D})$: $ax + by + cz + d = 0$ qui transforme le point $M(x, y, z)$ en $M'(x', y', z')$ est : $f : \begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$ (d, d', d'') sont les coordonnées à l'origine.

Son endomorphisme associé a pour expression analytique : $\varphi : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = a'x + b'y \\ z' = a''x + b''y \end{cases}$

1.2.5 Remarque

L'affinité f et son endomorphisme associé ont la même nature.

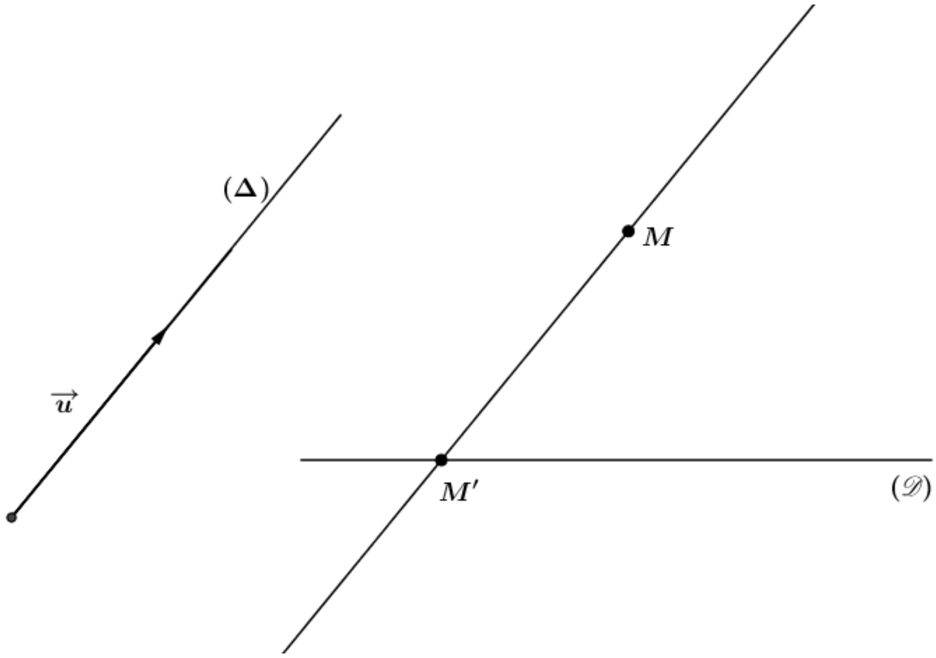
1.2.6 Propriétés

Soit f une affinité de rapport k, de base $(\mathscr{D})$, de direction (Δ), transformant le point M en M' et H le projeté de M sur la base parallèlement à la direction.
▷ Les points M, M' et H sont alignés.
▷ Si $k = 0$, l'affinité f est une projection affine.
▷ Si $k = 1$, l'affinité f est l'identité du plan.
▷ Si $k = -1$, l'affinité f est une symétrie oblique d'axe (Δ). Alors $f \circ f = idp$ (f est involutive)

1.3 Projection ponctuelle

1.3.1 Définition

On appelle projection ponctuelle du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même,de direction (Δ) et d' axe $(\mathscr{D})$, l'application du plan $(\mathscr{P})$ transformant le point M en M' tel que M' est le projeté de M sur la base $(\mathscr{D})$ suivant la direction (Δ).



1.3.2 Éléments caractéristiques

Toute projection ponctuelle est caractérisée par :
▷ Sa base ;
▷ Sa direction .

1.3.3 Expression analytique

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Deux conditions sont à vérifier :
▷ Première condition : $M'(x';y')$ appartient à $(\mathscr{D})$;
▷ Deuxième condition : le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $det(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}) = 0$. Ainsi l'expression analytique de$f$ est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

1.3.4 Propriétés

▷ L'ensemble des points invariants par la projection f est l'axe $(\mathscr{D})$;
▷ Toute projection ponctuelle n'est pas bijective ;
▷ $f \circ f \circ f \circ f \circ ... \circ f = f$. On dit que toute projection ponctuelle est idempotent

Exercice 1

Déterminer l'expression analytique de l'affinité f de rapport 2, d'axe la droite $(\mathscr{D}) : 2x - y + 1 = 0$ et de direction la droite $(\Delta) : x - y + 2 = 0$.

Exercice 2

Le plan $(\mathscr{D})$ est rapporté un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner l'expression analytique de l'affinité orthogonale f de rapport 2 et d'axe (Ox).
2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 2.

(a) Trouver les équations cartésiennes du cercle $(\mathscr{C})$ et de son image $(\mathscr{C}')$ par l'affinité f.

(b) Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans le même repère. On admet que $(\mathscr{C}')$ passe par les points $A(2,0)$; $A'(-2,O)$; $B(0,4)$ et $B'(0,-4)$.

Solution de l'exercice 1

Déterminons l'expression analytique de l'affinité f de rapport 2, d'axe la droite $(\mathscr{D}) : 2x-y+1=0$ et de direction la droite $(\Delta) : x-y+2=0$.
On a : $(\mathscr{D}) : 2x-y+1=0$ et $(\Delta) : x-y+2=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u}(1,1)$
$det(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{u}) = 0 \Longrightarrow x - x_H - y + y_H = 0$
$x_H - y_H = x - y$ (1)
$H \in (\mathscr{D}) \Longrightarrow 2x_H - y_H + 1 = 0$ (2)
(1)-(2) donne $x_H = -x+y-1$ (3) et (3) dans (1) donne $y_H = -2x+2y-1$ (4)
$\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HM} \Longrightarrow \overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{HM}$
On a : $f : \begin{cases} x' = 3x-y+1 \\ y' = 2x+1 \end{cases}$