LES OSCILLATEURS MÉCANIQUES

I- Définition

Un oscillateur mécanique est un système dont le mouvement est périodique et s'effectue de part et d'autre d'une position d'équilibre. On distingue les oscillateurs harmoniques et les oscillateurs non harmoniques.

II- Les oscillateurs harmoniques

1- Le pendule élastique

1.1. Description

Un pendule élastique est un système constitué d'un ressort dont l'une extrémité est fixe et l'autre porte un solide. Lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre et lâché, il effectue des mouvements de va-et-vient autour de cette position.

1.2. Étude d'un pendule élastique horizontal.

1.2.1. Étude cinématique

1) Mouvement rectiligne sinusoïdal :

a) Définition :

Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal lorsqu'il effectue des mouvements de va-et-vient autour d'une position moyenne.

b) Equation horaire :

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne

sinusoïdal est de la forme x $(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$ avec :

$\boldsymbol{x}$: l'élongation à l'instant t, $\boldsymbol{x_m}$ l'élongation maximale ou amplitude ;

$\boldsymbol{\omega}$: la pulsation (elle s'exprime en rad/s) ; $\boldsymbol{\varphi}$ représente la phase à l'origine **;**

$(\boldsymbol{\omega t + \varphi})$: la phase à l'instant t.

x_m et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales d'excitation.

c) **Vitesse d'oscillation**

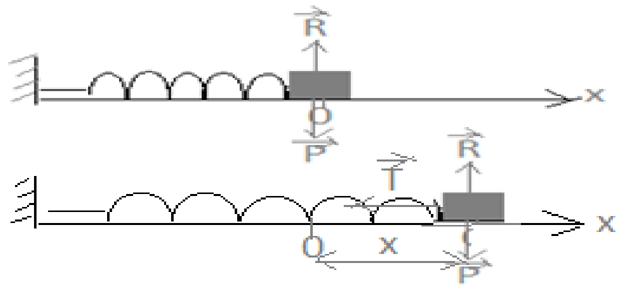
$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$

d) **Accélération du mouvement**

$\ddot{x} = -\,\omega^2\, x_m \sin(\omega t + \varphi)$ or $x_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{x}$

$\boldsymbol{\ddot{x} = -\,\omega^2 \mathrm{x}}$ Cette équation est une équation différentielle linéaire qui caractérise un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω.

1.2.2. Etude dynamique



On écarte le solide de sa position d'équilibre d'une longueur x par rapport à sa position d'équilibre 0 ; puis on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates t = 0). Il se met à osciller de part et d'autre de cette position d'équilibre.

- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Système : solide de masse m accroché à un ressort.
- Forces extérieures :

le poids $(\vec{P})$; la tension du ressort ($(\vec{T})$; et la réaction $(\vec{R}\,)$ du support

- Théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

Projection suivant l'axe horizontal Ox: $-\,\mathrm{T} = \mathrm{m.a_x}$ avec $\mathrm{a_x} = \ddot{x}$; et T = K.x

Ainsi : $-\ K.x\ =\ m.\ddot{x} \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x} = -\frac{K}{m}.x}$

1.2.3. Etude énergétique

- Système : solide-ressort-Terre
- Etat de référence :
  Etat initial : position d'équilibre 0
  Etat de mouvement : position quelconque x.
- $\vec{R}$, $\vec{P}$ et $\vec{T}$
- Méthode à appliquer : méthode énergétique :

E_M = Ec + Epe + Epp avec

$E_M = \frac{1}{2}m\acute{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$ + m.gh avec h = cste ; car système horizontal

Système conservatif : E_M = cste => $\frac{dE_M}{dt} = 0$

$m\dot{x}.\ddot{x} + Kx.\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}\,(m.\ddot{x} + Kx) = 0$ et comme $\dot{x}$ = 0 ou

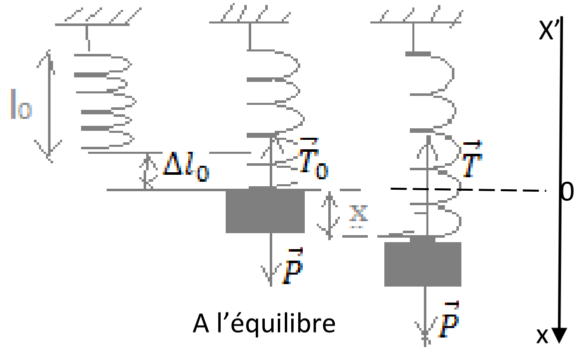
$m.\ddot{x} + Kx = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{x} = -\frac{k}{m}.x}$

En posant $\boldsymbol{\omega^2} = \boldsymbol{\frac{K}{m}}$ on retrouve l'équation différentielle $\boldsymbol{\ddot{x} = -\,\omega^2\,x}$ d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$; de période $T = 2 \times \pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ et dont l'une des solutions est de la forme

$x\,(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$. Ainsi un oscillateur dont l'équation du mouvement est une fonction sinusoïdale du temps est un oscillateur harmonique.

1.3. Etude d'un pendule élastique vertical

1.3.1. Étude dynamique



A l'équilibre

En mouvement

- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Système : solide de masse m suspendu à un ressort.
- Bilan des forces : $\vec{P}$; $\vec{T}$
- Théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$

Projection suivant l'axe verticale x'x orienté vers le bas : $P - T = m.a_x$;

- A l'équilibre $T = k\Delta l_0$ et $a_x = 0$, et comme P =m.g alors on a :

$$\boldsymbol{mg - k\Delta l_0 = 0}$$

- A un instant quelconque pendant le mouvement,

$T = k\Delta l$, avec $\Delta l = x + \Delta l_0$, et $a_x = \ddot{x}$. Ce qui donne

$mg - k(x + \Delta l_0) = m.\ddot{x} \Rightarrow mg - kx - k.\Delta l_0 = m.\ddot{x}$; et comme $\boldsymbol{mg - k\Delta l_0 = 0}$, alors $-kx = m.\ddot{x} \Leftarrow$

$\boldsymbol{\ddot{x} = -\frac{k}{m}.x}$

1.3.2. Etude énergétique

- Système : solide-ressort-Terre
- Etat de référence :
  Etat initial : position d'équilibre 0
  Etat de mouvement : position quelconque x.
- Bilan des forces : Forces intérieures : $\vec{P}\,;\vec{T}$. Forces extérieures : néant.
- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux états quelconques (1) et (2) du système :

$W_{1\to2}^{(\vec{P})} + W_{1\to2}^{(\vec{T})} = E_{C_2} - E_{C_1}$. D'après le théorème de l'énergie potentielle,

$W_{1\to2}^{(\vec{P})} = E_{PP_1} - E_{PP_2}$ et

$W_{1\to2}^{(\vec{T})} = E_{Pe_1} - E_{Pe_2}$. Ce qui donne

$$E_{PP1} - E_{PP2} + E_{Pe1} - E_{Pe2} = E_{C2} - E_{C1}$$

$$\Longrightarrow E_{PP_1} + E_{Pe_1} + E_{C_1} = E_{PP_2} + E_{Pe_2} + E_{C_2}$$

$\Longrightarrow E_{M1} = E_{M2}$; l''énergie mécanique est constante.

$E_M = E_C + E_{PP} + E_{Pe}$, avec ; Ec = $\frac{1}{2}m\acute{x}^2$

$Epe = \frac{1}{2}k(x + \Delta l_0)^2$ lorsque l'état de référence est celui où le ressort est détendu :

$E_{PP} = -mg$x, si on choisit comme état de référence l'état où le solide est dans la position d'équilibre. D'où l'expression de l'énergie mécanique :

E_M = $\boldsymbol{\frac{1}{2}m\acute{x}^2 + \frac{1}{2}k(x + \Delta l_0)^2 - mg\mathrm{x}}$

Lorsqu'on développe le système et en tenant compte du fait que $\boldsymbol{mg - k\Delta l_0 = 0}$; on obtient une expression simplifiée de l'énergie mécanique telle que : $E_M = \boldsymbol{\frac{1}{2}m\acute{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0{}^2}$

Système conservatif : E_M = cste => $\frac{dE_M}{dt} = 0$

$m\dot{x}.\ddot{x} + Kx.\dot{x}$= 0=>$\dot{x}\,(m.\ddot{x} + Kx)$= 0 et comme $\dot{x}$ = 0 ou

$m.\ddot{x} + Kx$ = 0 <=> $\boldsymbol{\ddot{x} = -\frac{k}{m}.x}$

En posant $\boldsymbol{\omega^2 = \frac{K}{m}}$; on retrouve l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal tel que décrit dans 1.2.3.

2. Le mouvement circulaire sinusoïdal

2.1. Le pendule de torsion

2.1.1. Description

Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil de torsion. Ce fil exerce un couple de rappel proportionnel à l'angle de torsion qu'on lui impose :

$\mathcal{M}$ = $\boldsymbol{-C.\theta}$. On écarte le système de sa position d'équilibre dans le plan horizontal puis on le lâche, Il effectue des mouvements de va-et-vient autour de cette position.

2.1.2. Mouvement circulaire sinusoïdal :

a) Définition :

Le mouvement circulaire est dit sinusoïdal lorsque le mobile effectue des mouvements de va-et-vient autour d'une position centrale en décrivant un arc de cercle.

b) Equation horaire :

L'équation horaire d'un mouvement circulaire sinusoïdal est de la forme :

$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ avec :

θ : élongation à l'instant t, θ_m : élongation maximale ou amplitude ;
$\boldsymbol{\omega}$: pulsation (elle s'exprime en rad/s) ; $\boldsymbol{\varphi}$ représente la phase à l'origine **;**
$(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi})$: phase à l'instant t.
θ_m et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales d'excitation.

c) **Vitesse d'oscillation**

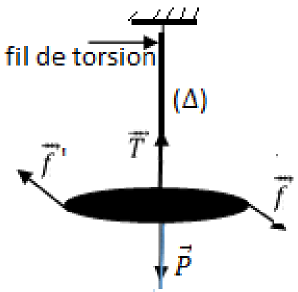
$\dot{\theta} = \omega\, \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$

d) **Accélération du mouvement**

$\ddot{\theta} = -\,\omega^2\, \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ or $\theta_m \sin(\omega t + \varphi) = \theta$

$\boldsymbol{\ddot{\theta} = -\,\omega^2}\,\theta$ Cette équation est une équation différentielle circulaire qui caractérise un mouvement circulaire sinusoïdal de pulsation ω.

2.2.2. Etude dynamique



- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Système : solide de masse m suspendu à un fil.
- Bilan des forces : poids $\vec{P}$, tension $\vec{T}$; couple de forces$(\vec{f}, \vec{f'})$
- Théorème du moment cinétique : $\sum M(\overrightarrow{F}/\Delta) \;\; = J_{S/\Delta}.\ddot{\theta}$

$$M(\vec{T}/\Delta) + M(\vec{P}/\Delta) + M_C \;\; = J_{S/\Delta}.\ddot{\theta}$$

$\vec{P}$ et $\vec{T}$ étant confondus avec l'axe ; leurs moments sont nuls
$M_C \;\; = J_{S/\Delta}.\ddot{\theta}$ or $M_C = -C.\theta$

D'où $-C.\theta = J_{S/\Delta}.\ddot{\theta}$ ‹=› $\boldsymbol{\ddot{\theta}} = -\dfrac{C}{J_{S/\Delta}}\theta$

2.2.3. Etude énergétique

- Système : solide-fil-Terre
- Etat de référence :
  Etat initial : position d'équilibre θ = 0
  Etat de mouvement : position quelconque θ
- $(\vec{f}\,;\vec{f}\,')$, $\vec{P}$ et $\vec{T}$
- Méthode à appliquer : méthode énergétique :

E_M = Ec + Ept + Epp avec

$E_M = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$ + m.gh avec h = cste ; car système horizontal

Système conservatif : E_M = cste => $\dfrac{dE_M}{dt} = 0$

$J.\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$ et comme $\dot{\theta} = 0$ ou $J.\ddot{\theta} + C\theta = 0$ ‹=› $\boldsymbol{\ddot{\theta}}$ ‹=› $\boldsymbol{\ddot{\theta}} = -\dfrac{C}{J_{S/\Delta}}\theta$

En posant $\boldsymbol{\omega^2} = \dfrac{C}{J}$ on retrouve l'équation différentielle $\boldsymbol{\ddot{\theta} = -\,\omega^2}\,\theta$ d'un mouvement circulaire sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{C}{J}}$; de période $T = 2\times\pi\sqrt{\dfrac{J}{C}}$ et dont l'une des solutions est de la forme $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$). Ainsi un oscillateur dont l'équation du mouvement est une fonction sinusoïdale du temps est un oscillateur harmonique.

III- Les oscillateurs non harmoniques

1- Le pendule pesant

1.1. Définition :

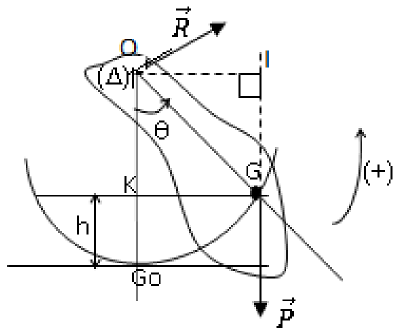
Un pendule pesant est un solide susceptible d'osciller autour d'un axe de rotation ne passant pas par son centre d'inertie G.

Exemples : balançoire, balancier d'une horloge…

1.2. Étude du pendule pesant

1.2.1. Étude dynamique

Dans le R.T.S.G, le Solide de moment d'inertie J_Δ est soumis à l'action du poids $\vec{P}$ et de la réaction de l'axe $\vec{R}$.



Le théorème du moment cinétique nous permet d'écrire : $\sum M\overrightarrow{fex}/\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$M_{\overrightarrow{P}/\Delta} + M_{\overrightarrow{R}/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ => $-P.OI = J_\Delta.\ddot{\theta}$

car $M_{\overrightarrow{R}/\Delta} = O$

$$-m.g.OG.sin\theta = J_\Delta.\ddot{\theta} \text{ soit } \ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mathbf{m.g.OG}}{\mathbf{J_\Delta}}\mathbf{sin\theta}$$

1.2.2. Méthode énergétique

En considérant le système « pendule-Terre », l'énergie mécanique s'écrit :

$E_M = E_C + E_P$ soit $E_M = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + m.g.h\ et\ h = KGo = OGo - OK$

dans le triangle $\widehat{OKG}$, $\mathrm{OK = OG.Cos\theta\ donc\ KGo = OG(1 - cos\theta)}$

$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + m.g.OG(1 - cos\theta)$ En l'absence des frottements, EM = cte ;

$$\frac{\mathbf{dE_M}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0\ soit}\ \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{J_\Delta\dot{\theta}^2} + \mathbf{m.g.OG(1 - cos\theta)}\right) = \mathbf{0}$$

$$J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + m.g.OG.\dot{\theta}sin\theta = 0 <=> \dot{\theta}(J_\Delta\ddot{\theta} + m.g.OG.sin\theta) = 0$$

$$\dot{\theta} = 0\ ou\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\mathbf{m.g.OG}}{\mathbf{J_\Delta}}\mathbf{sin\theta} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mathbf{m.g.OG}}{\mathbf{J_\Delta}}\mathbf{sin\theta}$$

Cette équation différentielle admet une solution θ = f(t) qui n'est pas sinusoïdale. D'où le pendule pesant n'est pas un **oscillateur harmonique.**

- **Cas particulier : conditions d'oscillations sinusoïdales ou linéarisation du mouvement**

Pour obtenir des oscillations sinusoïdales, il faut que l'angle θ soit petit c.à.d. $0 < \theta \leq 10°$. Dans ce cas on écrit $sin\theta \approx \theta$ et l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mathbf{m.g.OG}}{\mathbf{J_\Delta}}\boldsymbol{\theta}$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{m.g.OG}{J_\Delta}$; on retrouve l'équation $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\omega_0^2}.\boldsymbol{\theta}$ dont l'une des solutions est de la forme **$\theta = \theta_m.sin(\omega_o.t + \varphi)$ et de période**

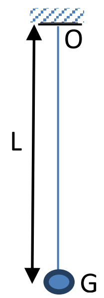
$$\mathbf{To = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.OG}}}$$

N.B : Quelle que soit la valeur de l'angle θ imposé au système, tant que celle-ci est faible, la période reste la même. On dit dans ce cas que les oscillations sont isochrones.

2. Le pendule simple

2.1. Définition

On appelle pendule simple un point matériel suspendu à fil dont l'extrémité supérieure est accrochée à un point fixe.



2.2. .étude du mouvement

L'étude dynamique et l'étude énergétique sont identiques à celles du pendule pesant.

Pour un pendule simple ; on a : $J_\Delta = mL^2$ et OG = L

$$To = 2\pi\sqrt{\frac{m.L^2}{m.g.L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad ; \quad To = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

2.3. Pendule simple synchrone d'un pendule composé

On appelle pendule simple synchrone d'un pendule composé, un pendule simple qui a même période qu'un pendule composé :

Longueur du pendule simple synchrone : T = T_0

$$To = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.OG}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{J_\Delta}{m.OG}$$