Table des matières

Chapitre 1

PROBABILITÉS

1.1 Rappels sur le dénombrement

a) Définition

Dénombrer un ensemble fini revient à compter ou à déterminer le nombre de ses éléments.

b) Réunion de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle réunion des ensembles A et B, l'ensemble formé des éléments appartenant à A ou à B. On note $A \cup B$.
$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

c) Intersection de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle intersection des ensembles A et B, l'ensemble des éléments communs à A et B. On note $A \cap B$
$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Remarque

Si $A \cap B = \{\ \}$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

d) Partie d'un ensemble fini

Soit A et B deux ensembles non vides. On dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On écrit $A \subset B$.

Exemple

$A = \{0, 1, 2, 3, 6, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 6, 5, 6, 7, 8\}$.
On a : $A \subset B$

Remarque

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.
Ainsi $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. On a donc : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}(E)$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont les éléments de $\mathcal{P}(E)$.

e) Complémentaire d'un ensemble fini

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
Le complémentaire de A dans Ω noté $\overline{A}$ ou C_Ω^A est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$. Déterminer le complémentaire de A.

Remarque

$\triangleright$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on dit que A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
$\triangleright$ $A \cap \Omega = A$
$\triangleright$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\triangleright$ Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, alors $\overline{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

1.1.1 Dénombrement de parties d'un ensemble finis

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E et on note card(E), le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Exemples

On donne les ensembles E ; F et G définis par :
$E = \{a, b; c, d\}$; $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $G = \{a\}$.

Calculer le cardinal des ensembles E ; F et G.

Remarque

Le cardinal de l'ensemble vide est nul.

1.1.2 Cardinal de la réunion de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. Le cardinal de $A \cup B$ noté $card(A \cup B)$ est tel que :
▷ si $A \cap B = \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)}$;
▷ si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)} - card(A \cap B)$;
▷ $card(A \cup B) = card(A \setminus B) + card(B \setminus A) + card(A \cap B)$;
▷ $card(A) = card(A \setminus B) + card(A \cap B)$;
▷ $card(B) = card(B \setminus A) + card(A \cap B)$.

Exemple

On donne $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 3, 7\}$. Déterminer $card(A \cup B)$.

1.1.3 Cardinal du complémentaire d'un ensemble fini

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
On a $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$. Déterminer le cardinal du complémentaire de A.

1.1.4 Cardinal de l'ensemble des parties finis

Soit E un ensemble non vide tel que $\text{card(E)} = n$, alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Exercice

Soit E un ensemble tel que $E = \{a, b, c\}$.

1. Calculer le cardinal de E.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des parties de E.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

1.2 Dénombrement de listes

1.2.1 Produit cartésien de deux ensembles

a) Définition

Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de A et B et on note $A \times B$ (lire A croix B) l'ensemble suivant : $A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$.

b) Propriétés

$\triangleright$ Pour tous ensembles A et B, on a : $A \times B \neq B \times A$;
$\triangleright$ $card(A \times B) = card(B \times A) = card(A) \times card(B)$.

1.2.2 Produit cartésien d'un ensemble finis

a) Définition

Soit E_1, E_2,..., E_p p ensembles non vides. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p$ est l'ensemble de tous les p-uplet $(a_1, a_2, ..., a_p)$ telles que $a_i \in E_i$ avec $i \in \{1, 2, ..., p\}$. On a :
$card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_p) = card(E_1).card(E_2)....card(E_p)$.
En particulier si $card(E_1) = card(E_2) = ... = card(E_p) = n$, alors
$card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p) = n^p$.

b) Propriété

Le nombre d'application d'un ensemble A à p éléments vers un ensemble B à n éléments est égal à n^p.

Exercice 1

A une soirée on a trois filles et deux garçons. Combien de couples peut on former ?

Exercice 2

Les numéros de téléphones au Congo Brazzaville de la société MTN sont des nombres entiers naturels à 9. Déterminer le nombre de numéros de téléphone que la société MTN

peut avoir au maximum.

1.3 Factorielle

1.3.1 Définition

Soit n un entier naturel. On appelle factorielle n, le nombre noté $n!$ défini par :
$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \times 2 \times 1$.
Par convention : $0! = 1$

Exemple

Calculer $3!$; $5!$ et $9!$

Solution

Calculons :
On a : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$9! = 362880$

1.4 Arrangements

1.4.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier non nul tel que $n \geq p$. On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet d'élément de E deux à deux distincts. Il s'agit de l'arrangement sans répétition.

1.4.2 Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté A_n^p, est tel que : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$.

Exemples

$A_5^2 = 20$ et $A_6^5 = 720$

Remarque

$A_n^n = n!$

1.4.3 Nombre d'arrangements avec répétition

Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble à n éléments est : n^p.

Exercice

On donne les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
Combien de nombre de 3 chiffres peut-on former avec ces nombres ?

1. si les chiffres peuvent se répéter ?
2. si les chiffres sont deux à deux distincts ?

1.5 Permutations des n éléments d'un ensemble

1.5.1 Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement des n éléments de E.
Il s'agit de la permutation sans répétition.

1.5.2 Nombre de permutations

Le nombre de permutations de n éléments de E est : $p_n = n!$

1.5.3 Nombre de permutations avec répétition

Si parmi les éléments à permuter, un se répète jusqu'à r_1 fois et les autres se répètent jusqu'à r_p, fois, alors le nombre de permutation est : $p_n(r_1; r_2) = \dfrac{n!}{r_1! \times r_2! \times ... \times r_p!}$.

Exercice

1. Combien de mots différents peut-on former avec le nom ANE ?
2. Combien de mots différents peut-on former avec le nom AABCCC ?

1.6 Combinaisons

1.6.1 Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

1.6.2 Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p tel que :
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $p \leq n$.

1.6.3 Propriétés

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on a :
▷ $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$ et $C_n^0 = 1$;
▷ si $0 < p < n$, alors $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$;
▷ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

1.6.4 Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.
On a $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Exemple

Calculer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$.

1.7 Notions de tirages

Soit E un ensemble fini, p et n deux entiers naturels.

1.7.1 Tirages successifs avec remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement avec répétition, c'est-à-dire : n^p.

1.7.2 Tirages successifs sans remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement sans répétition, c'est-à-dire : A_n^p.

1.7.3 Tirages simultanés

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E distincts, non ordonnés le nombre de tirages est la combinaison de p éléments de E, c'est-à-dire : C_n^p.

Exercice

Un sac contient 26 jetons représentant les 26 lettres d'alphabet français, dont 20 consonnes et 6 voyelles.

1. On tire simultanément 5 jetons du sac.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant que des consonnes.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.
   (d) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une voyelle.
2. On tire successivement 5 jetons du sac avec remise.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant que des consonnes.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.

Solution

1. On tire simultanément 5 jetons du sac.
   (a) Déterminons le nombre total de tirages possibles.
   $N = C_{26}^5 = \dfrac{26!}{5! \times 21!} = 65780.$
   (b) Déterminons le nombre de tirages contenant que des consonnes .
   $N = C_{20}^5 = 15504.$
   (c) Déterminons le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.
   $N = C_6^2 \times C_{20}^3 = 17100.$

(d) Déterminons le nombre de tirages contenant au moins une voyelle.

$N = C_6^1 \times C_{20}^4 + C_6^2 \times C_{20}^3 + C_6^3 \times C_{20}^2 + C_6^4 \times C_{20}^1 + C_6^5 \times C_{20}^0 = 50276$

2. On tire successivement 5 jetons du sac avec remise.

(a) Déterminons le nombre total de tirages possibles.

$N = A_{26}^5 = \dfrac{26!}{21!} = 7893600.$

(b) Déterminons le nombre de tirages contenant que des consonnes .

$N = A_{20}^5 = \dfrac{20!}{15!} = 1860480.$

(c) Déterminons le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.

$N = A_6^2 \times A_{20}^3 = 205200.$

1.8 Notions de probabilités

1.8.1 Vocabulaires des événements

a) Expérience aléatoire ou épreuve

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

Exemple

Le jet d'un dé parfait à six faces.

b) Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
On le note souvent par Ω.

Exemple

Lors d'un jet de dé parfait à six faces, les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, alors on écrit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) Événement

On appelle événement, une partie ou un sous ensemble de l'univers Ω.

Exemple

Soit A l'événement " obtenir les nombres pairs lors d'un jet de dé à 6 faces ", on a : $A = \{2, 4, 6\}$.

d) Éventualité

Une éventualité est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple

On lance un dé bien équilibré à 6 faces, on a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

e) Événement élémentaire

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.

Exemple

Soit B l'événement " obtenir un nombre premier et pair lors d'un jet d'un dé non pipé à 6 faces ", on a : $B = \{2\}$.

f) Événement certain

Un événement certain est un événement qui est toujours réalisé : c'est l'univers Ω.

h) Événement incertain

Un événement incertain est un événement dont on connait pas le résultat.

i) Événement impossible

L'événement impossible est la partie vide de Ω.

Exemple

Obtenir le chiffre 7 lors d'un jet de dé de six faces numérotées de 1 à 6.

h) Événement Événements compatibles

Deux événements sont dits compatibles lorsqu'ils se réalisent ensemble. Le contraire est dit événement incompatible.

1.8.2 Probabilité d'un événement

a) Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité sur l'univers Ω, l'application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelle probabilité de l'événement A.

b) Propriétés

1. $p(\Omega) = 1$;
2. $p(\varnothing) = 0$; c'est la probabilité de l'événement impossible ;
3. si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
4. si $A \cap B = \varnothing$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;
5. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;
6. $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$; $p(A) \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$;
7. Si $A \subseteq B$; alors $p(A) \leq p(B)$.

$N.B$: Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisé.

1.8.3 Équiprobabilité ou probabilité uniforme

a) Définition

Soit Ω l'univers ayant n éventualités w_1, w_2....,w_n et p une probabilité sur Ω.
On dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables lorsque chaque événement élémentaire à la même probabilité, c'est- à - dire
$p(w_1) = p(w_2) = ... = P(w_n)$.

b) Propriétés

Soit Ω l'univers de n éventualités et p une probabilité sur Ω.
$\triangleright$ $p(w_1) = p(w_2) = ... = p(w_n) = \frac{1}{n}$.
$\triangleright$ Si un événement A contient k éventualités ($cardA = k$), alors

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{cardA}{card\Omega}$$

Remarque

On reconnait qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : parfaitement équilibré ; non truqué ; indiscernable au toucher ; au hasard ; bien battu ; pièce parfaitement symétrique ; pièce parfaite ; non pipé.

Exercice 1

Une boite contient 10 piles électriques dont 3 sont défectueuses. On tire au hasard et simultanément 2 piles de cette boite. Calcule la probabilité pour que.

1. Aucune pile tirée soit défectueuse.
2. Exactement une pile soit défectueuse.
3. Au moins une pile défectueuse.
4. Au plus deux piles soit défectueuses.

Exercice 2

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on note son numéro N. Les boules ont la même probabilité d'être tirées. On désigne respectivement par A et B les événements " N est pair " et " N est multiple de trois ".

1. Calculer le nombre de cas possibles.
2. Calculer le cardinal de $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants : A ; B ; $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$.
4. Calculer la probabilité des événements suivants : $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$.

1.9 Conditionnement

1.9.1 Probabilités conditionnelles

a) Définition

Soient Ω un univers fini ; p une probabilité sur Ω et A et B deux événements de Ω tels que $p(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé ou de A sachant B le nombre réel noté $p_B(A)$ ou $p(A \setminus B)$ défini par :
$p(A \setminus B) = p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$; alors :

▷ $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$;

▷ $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

b) Événements indépendants

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

▷ A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.

▷ A et B sont indépendants si et seulement si : $p(A\ B) = p(A)$ ou $p(B\ A) = P(B)$.

Théorème

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si ils vérifient une trois conditions.

▷ $p(A \setminus B) = p(A)$;

▷ $p(B \setminus A) = P(B)$;

▷ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Attention

Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

▷ Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$;

▷ Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire $p(A \cap B) = 0$

1.9.2 Arbres pondérés

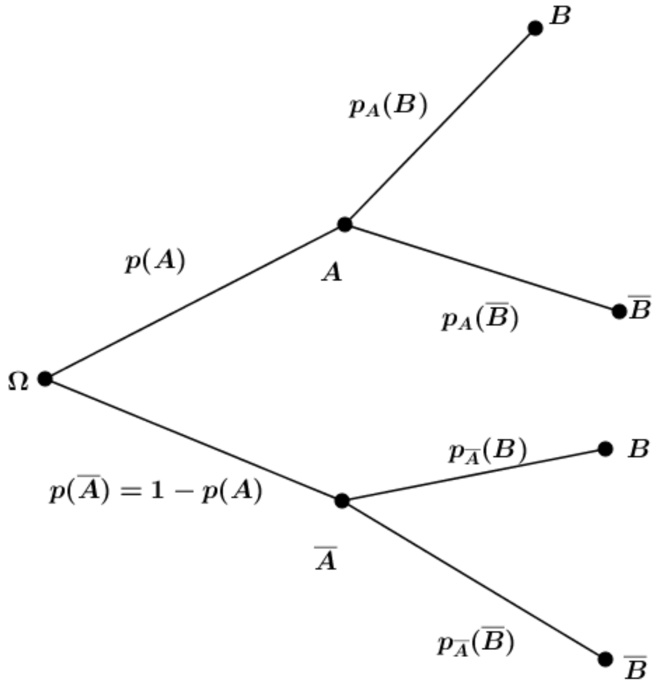
a) Règles de construction

▷ La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.

▷ La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différents branches composant ce trajet.

b) Cas de deux événements

Soit A et B deux événements.



1.9.3 Probabilités totales

En considérant l'arbre pondéré défini ci-dessus, on a :
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$; $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B})$; $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ et $\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
$p(B) = p[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})]$
$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$ ou $p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_A(B) \times p(\overline{A})$
$p(\overline{B}) = p[(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})]$
$p(\overline{B}) = p(\overline{B} \cap A) + p(\overline{B} \cap \overline{A})$ ou $p(\overline{B}) = p_A(\overline{B}) \times p(A) + p_{\overline{A}}(\overline{B}) \times p(\overline{A})$

1.9.4 Formule de Bayes

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
$p_B(A) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}(B)} \times p(\overline{A})}$ et $p_A(B) = \dfrac{p_B(A) \times p(B)}{p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p(\overline{B})}$

Théorème

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de l'univers Ω et B un événement quelconque dans Ω. On a :
$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + P_{A_2}(B) \times p(A_2) + ... + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

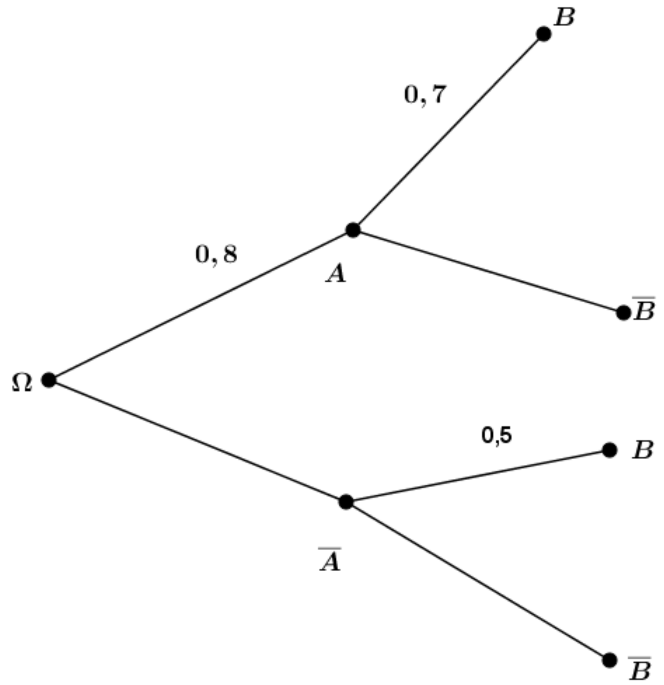
Exercice 1

Dans un département congolais, il a été établi que :
▷ 80% des salariés sont dans le secteur privé, le reste des salariés étant dans le secteur public ;
▷ parmi les salariés du secteur privé, 5% sont syndiqués ;
▷ parmi les salariés du secteur public, 15% sont syndiqués.
On choisit une personne au hasard parmi les salariés de ce département.
On note A l'événement " la personne est salariée du secteur privé " et S l'événement " la personne est syndiquée ".

1. Calculer les probabilités suivantes : $p(A)$; $p(\overline{A})$; $p_A(S)$ et $p_{\overline{A}}(S)$.
2. Construire un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit salariée du secteur privé et elle soit syndiquée.
4. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit un salarié syndiqué du secteur public.
5. Calculer les probabilités suivantes : $p(S)$ et $p(\overline{S})$.

Exercice 2

On considère deux événements A et B liés à une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.



1. Indiquer la signification des nombres suivants : $0,8$; $0,7$ et $0,5$.
2. Compléter cet arbre avec les probabilités manquantes.
3. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
4. (a) Calculer les probabilités suivantes : $p(B)$ et $p(\overline{B})$.

   (b) Calculer les probabilités suivantes : $p(\overline{A \cup B})$ et $p(A \cup B)$.

1.10 Variable aléatoire

1.10.1 Définition

Une variable aléatoire X est une application définie sur Ω muni d'une probabilité p a valeurs dans $\mathbb{R}$
Soit

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$w_i \longmapsto X(w_i) = x_i$$

1.10.2 Univers image

On appelle univers image l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
On le note $X = X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; .....; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n$.
On note :
▷ $(X = x_i)$ et on lit événement ≪ X prend la valeur x_i ≫
▷ $(X < \alpha)$ et on lit l'événement ≪ X prend la valeur strictement inférieure à α ≫ ; $\alpha \in \mathbb{R}$

Remarques

Soit $\Omega(X) = \{x_1; x_2; x_3; x_4; ....; x_n\}$.
▷ $p(X = x_1) = \dfrac{card(X = x_1)}{card\Omega} = p_1$;
▷ $p(X = x_2) = \dfrac{card(X = x_2)}{card\Omega} = p_2$;
▷ $p(X < x_4) = p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3)$ ou $p(X < x_4) = p_1 + p_2 + p_3$;
▷ $p(X > x_4) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - [p_1 + p_2 + p_3 + p_4]$
ou $p(X > x_4) = 1 - [p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) + p(X = x_4)]$ ou encore $p(X > x_4) = p(X = x_5) + p(X = x_6) + ... + p(X = x_n)$;
▷ $p(X \geq x_4) = p(X = x_4) + p(X = x_5) + p(X = x_6 + ... + p(X = x_n)$
ou $p(X \geq x_4) = p_4 + p_5 + p_6 + ... + p_n$
ou encore $p(X \geq x_4) = 1 - p(X < x_4) = 1 - [p_1 + p_2 + p_3]$;
▷ **Événement obtenir au plus** x_3
Il s'agit de l'événement $(X \leq x_3)$ et sa probabilité est $p(X \leq x_3) = p_1 + p_2 + p_3$;
▷ **Événement obtenir au moins** x_3
Il s'agit de l'événement $(X \geq x_3)$ et sa probabilité est $p(X \geq x_3) = 1 - p_1 + p_2$
ou $p(X \geq x_3) = p(X = x_3) + p(X = x_4) + ... + p(X = x_n)$.

1.10.3 Loi de probabilité

Définition

Soit p une probabilité définie sur l'univers Ω. On appelle loi de probabilité de la variable X sur Ω l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $p(X = x_i)$. Elle est représenter dans un tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	.....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	.....	p_n

N.B : Dans une loi de probabilité la somme des probabilités est égale à 1.

1.10.4 Espérance mathématique ; variance et Écart-type

a) Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

NB : si $E(X) = 0$, alors la variable aléatoire est dite centrée.

Remarques

Dans le cas d'une variable aléatoire X associe à un jeu ;

▷ si $E(X) > 0$, alors le jeu est favorable au joueur ;

▷ si $E(X) < 0$; alors le jeu est défavorable au joueur ;

▷ si $E(X) = 0$; alors le jeu est équilibré.

b) Variance

La variance d'une variable aléatoire X est le nombre d'une variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i$.

Théorème de KOENIG

$v(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

c) Écart-type

L'écart-type d'une variable aléatoire X est le nombre réel strictement positif noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

1.10.5 Fonction de répartition

a) Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0, 1]$ définie par :

$F(x) = p(X \leq x)$

Dans la pratique : on a :

$$\begin{cases} F(x) = 0; si\ x \in \,]-\infty; x_1[\\ F(x) = p_1, si\ x \in [x_1; x_2[\\ F(x) = p_1 + p_2; si\ x \in [x_2; x_3[\\ F(x) = p_1 + p_2 + p_3; si\ x \in [x_3; x_4[\\ \vdots \\ F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1, si\ x \in [x_n; +\infty[\end{cases}$$

b) Propriétés

▷ F est une fonction croissante en escalier ;

▷ La représentation graphique de F correspond, en statistique à la courbe des fréquences cumulées croissantes ;

▷ A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité et vice versa.

Exercice

Une urne contient trois boules rouges et quatre boules bleues. On tire deux boules simultanément et au hasard. On gagne $100F$ par boule rouge tirée. Une partie est fixée à $100F$.

On désigne par X la variable aléatoire associée à la somme gagné en francs.

1. Déterminer le nombre de cas possible.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Donner la loi de probabilité de X.
4. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
5. Un joueur avisé accepterait-il de miser ?
6. (a) Définir la fonction F de répartition de X.
   (b) Représenter cette fonction de répartition.

1.11 Lois de probabilité

1.11.1 Loi de Bernoulli

a) Définition d'une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues ou éventualités possibles :

▷ le succès, noté S de probabilité p ;

▷ l'échec, noté E de probabilité $q = 1 - p$.

Sa loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

b) Théorème

Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, on a : $E(X) = p$; $V(X) = pq$ et $\sigma(X) = \sqrt{pq}$.

c) Définition du schéma de Bernoulli

Un schéma est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de façons indépendante, une épreuve de Bernoulli.

d) Propriété

Soit un schéma de Bernoulli a n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p et celle de l'échec est $q = 1 - p$.
La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours de ces n épreuves est : $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$.

1.11.2 Loi Binomiale

a) Définition

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès réalisés sur n répétitions. Cette loi est appelé loi Binomiale de paramètre n et p, on note $X \sim \beta(n, p)$ avec p la probabilité du succès.
La probabilité de réaliser k fois le succès au cours de n répétitions est :
$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$.

b) Théorème

Pour une loi Binomiale de paramètres n et p, on a :
$E(X) = np\,;\, V(X) = npq = np(1-q)$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

c) Propriété

Soit X, Y deux variables aléatoires et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec X et Y indépendantes.
▷ $E(\lambda) = \lambda\,;$
▷ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)\,;$
▷ $E(\lambda X) = \lambda E(X)\,;$
▷ $V(\lambda) = 0\,;$
▷ $V(X+\lambda) = V(X)\,;$
▷ $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Exercice

Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :
▷ sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de $0,97$.
▷ sachant qu'une pièce est mauvaise, on la refuse avec une probabilité de $0,99$.
On choisit une pièce au hasard et on note A l'événement " la pièce est défectueuse " et B l'événement " la pièce refusée ".

1. (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
   (b) Construire l'arbre de probabilité correspond à cette situation.
2. (a) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.
   (b) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.
   (c) Soit C l'événement " avoir une erreur dans le contrôle ". Calculer $p(E)$.
3. Si on contrôle 5 pièces de façon indépendante. On désigne par X la variable aléatoire associée à cette expérience.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivi par la variable X ?
   (b) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

(c) Déterminer la probabilité des événements suivants :

▷ D " qu'il y ait exactement deux erreurs " ;

▷ E " qu'il y ait exactement trois erreurs ".

Exercices d'applications

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

1. a) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

   b) Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

2. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-100	0	100	150
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	α	$\frac{1}{9}$

où α est un réel positif.

   a) Déterminer le nombre réel α.

   b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

   c) Déterminer et construire la fonction de répartition F de X.

Exercice 2

Dans une classe de 60 élèves, un sondage d'opinion sur l'utilisation du préservatif a donné les résultats suivants :

	Filles	Garçons
Pour	24	16
Contre	12	8

On définit les événements suivants :

P : " l'élève est pour l'utilisation du préservatif " ; G : " l'élève est un garçon" et F : " l'élève est une fille "

1. Construire l'arbre pondéré des probabilités traduisant la situation.

2. a) Déterminer les probabilités des événements P, G, F, $P \cap G$ et $P \cap F$.

   b) Les événements P et G sont-ils indépendants ?

   c) Les événements P et F sont-ils indépendants ?

3. On choisit une fille au hasard.

   Déterminer la probabilité qu'elle soit pour l'utilisation du préservatif.

4. On choisit un garçon au hasard.

   Déterminer la probabilité qu'elle soit pour l'utilisation du préservatif.

5. Les garçons utilisent-ils plus le préservatif que les filles ?

Exercice 3

Un sondage effectué à la ville de Brazzaville à propos de la construction d'un pont reliant Brazzaville et Kinshasa donne les résultats suivants : 60% des personnes interrogées sont contre la construction de ce pont. Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 80% sont des écologistes.

Parmi les personnes favorables à la construction, 35% sont des écologistes.

On note C l'événement " la personne interrogée est contre la construction " et

E l'événement " la personne interrogée est écologiste ".

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langage des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cet événement.
3. Déterminer les probabilités suivantes : $P(E \cap C)$ et $P(E \cap \overline{C})$.
4. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est écologiste.
5. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est favorable à la construction du pont.
6. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est favorable à la construction sachant qu'elle n'est pas écologiste ".
7. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est contre la construction sachant qu'elle est écologiste ".

Exercice 4

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $P(A)$ désigne la probabilité de A ; $P(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé. Le nombre de clients se présentant en présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

$p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

1. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Déterminer la variance et l'écart-type de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition F de X.
4. Dans cette station-service, la la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les évènements suivants :

C_1 : " en cinq minutes, un seul client se présent " ;

C_2 : " en cinq minutes, deux clients se présentent " ;

C_3 : " en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ".

(a) Calculer $P(C_1 \cap C_2)$.

(b) Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_1 \cap E)$.

(c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

Exercice 5

Chaque jour, Prince premier ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

▷ D : " Son portable est déchargé "

▷ O : " Il a oublié son portable chez lui ".

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Il a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à $\frac{1}{20}$ et, d'autre part, qu'il oublie son portable chez lui un jour sur dix.

1. Répondre par vrai ou faux, si les événements D et O sont indépendants, alors les événements $\overline{D}$ et O sont aussi indépendants.
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que prince premier oublie son portable chez lui et qu'il ne soit pas déchargé ?
3. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas se servir de son portable ?
4. Au cours d'une semaine, il travaille 5 jours. On admet que le fait qu'il oublie son portable chez lui un jour donné est indépendant du fait qu'il l'oublie ou non les autres jours. Quelle est la probabilité de l'événement A : " Il a oublié son portable chez lui au moins une fois dans la semaine " ?

Exercice 6

Une machine de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

▷ 12% des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur ;

▷ parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20% ont un défaut dans la forme ;

▷ parmi les vêtements n'ayant pas un défaut dans la couleur, 8% présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'événement " le vêtement présente un défaut dans la couleur "

et $\overline{C}$ l'événement contraire.
On appelle F l'événement " le vêtement présente un défaut dans la forme "
et $\overline{F}$ l'événement contraire.
Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'événement A " le vêtement choisit ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme ".
3. Calculer la probabilité que le vêtement choisit ait un défaut dans la forme.
4. Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut. Cette affirmation est-elle correcte ? expliquer

Exercice 7

Dans une mare d'eau vivent des grenouilles vertes et des rainettes. 30% des grenouilles sont des rainettes et 70% des grenouilles sont des grenouilles vertes.
Un héron mange 10% des rainettes et 20% des grenouilles vertes de cette mare d'eau. On considère les événements suivants :
R : " la grenouille est une rainette "
V : " la grenouille est une grenouille verte "
M : " la grenouille est mangée par le héron ".

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Déterminer la probabilité qu'une rainette soit mangée par le héron.
3. Déterminer la probabilité qu'une grenouille soit mangée par le héron.
4. Déterminer la probabilité qu'aucune grenouille soit mangée par le héron.
5. Déterminer la probabilité qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron.
6. Déterminer la probabilité qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette.

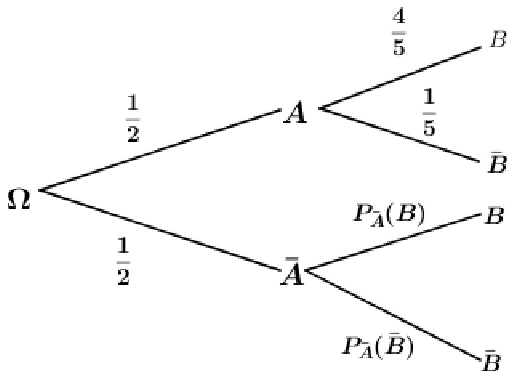
Solution de l'exercice 1

1. (a) Calculons $P_A(B)$ et $P_A(B)$.

   $\triangleright$ $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3}{4}$.

   $\triangleright$ $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{4}{5}$.

   (b) Calculons $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.



   $\triangleright$ Pour $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

   On sait que :

   $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \Longrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A) \times P_A(\overline{B}) = \dfrac{3}{20}$.

   $\triangleright$ $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

   $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{3}{10}$.

2. (a) Déterminons α.

   $\alpha + \dfrac{8}{9} = 1 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{1}{9}$.

   (b) Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\omega(X)$.

   On sait que : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i P_i$

   $E(X) = \dfrac{50}{9}$

   On sait que : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

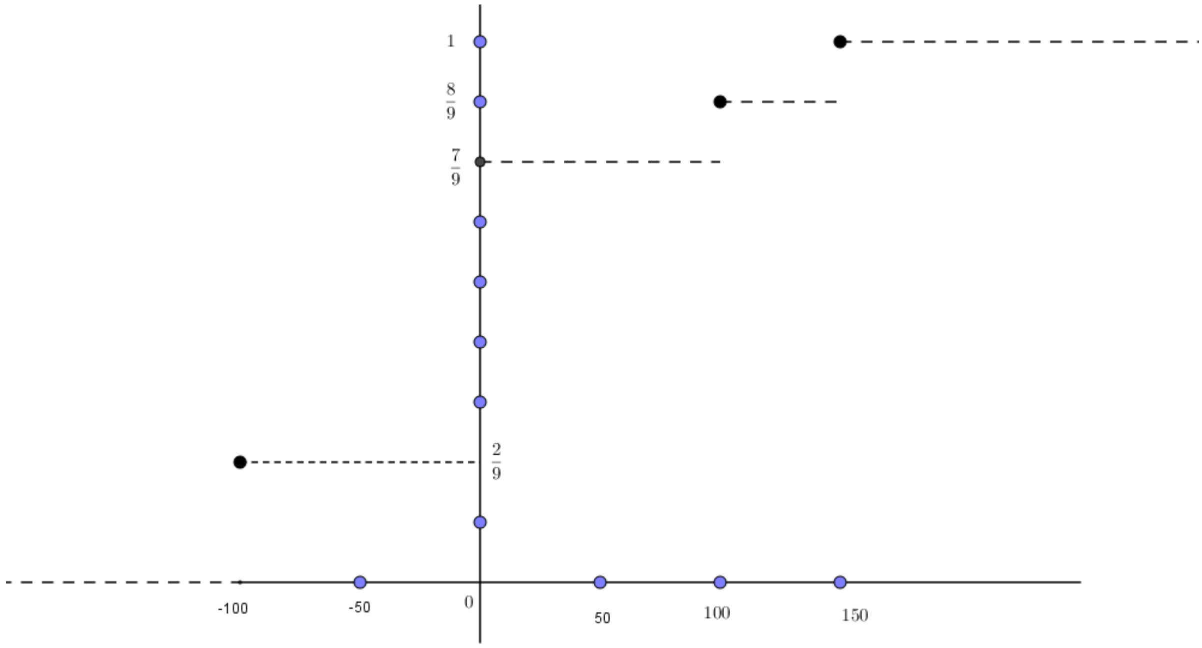
   $V(X) = \dfrac{470000}{81}$

   On sait que : $\omega(X) = \sqrt{V(X)}$

   $\omega(X) = 76,17$

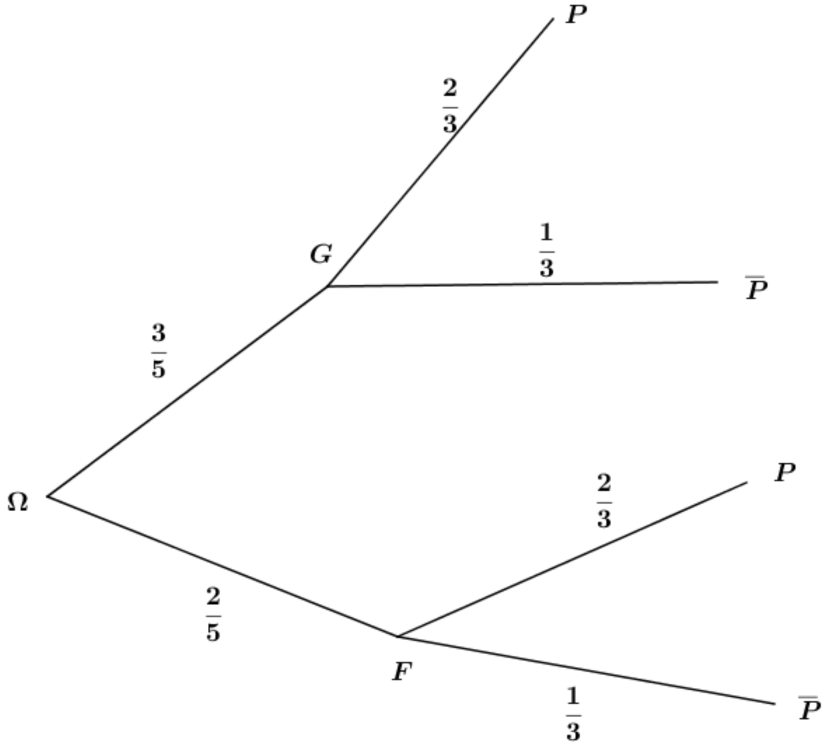
3. Déterminons et construisons la fonction de repartions

On a : $\begin{cases} F(x) = 0 \ \text{ si } x < -100 \\ F(x) = \dfrac{2}{9} \ \text{ si } x \in [-100; 0[\\ F(x) = \dfrac{7}{9} \ \text{ si } x \in [0; 100[\\ F(x) = \dfrac{8}{9} \ \text{ si } x \in [100; 150[\\ F(x) = 1 \ \text{ si } x \in [150; +\infty[\end{cases}$



Solution de l'exercice 2

1. Arbre pondéré



2. (a) Déterminons les probabilités des évènements P, G, F, $P \cap G$ et $P \cap F$.
$P(P) = \dfrac{2}{3}$; $P(G) = \dfrac{2}{5}$; $P(F) = \dfrac{3}{5}$;
$P(P \cap G) = P(G) \times P_G(F) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$

$P(P \cap F) = P(F) \times P_F(P) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$

   (b) Indépendance des évènement P et G
P et G sont indépendants $\Leftrightarrow P(P \cap G) = P(P) \times P(G)$
$P(P \cap G) = \dfrac{4}{15}$ et $P(P) \times P(G) = \dfrac{4}{15}$
D'où P et G sont indépendants.

   (c) Indépendance des évènement P et F
P et F sont indépendants $\Leftrightarrow P(P \cap F) = P(P) \times P(F)$
$P(P \cap F) = \dfrac{2}{5}$ et $P(P) \times P(F) = \dfrac{2}{5}$
D'où P et F sont indépendants.

3. On choisit une fille au hasard. Déterminons la probabilité qu'elle soit pour l'utilisation de préservatif
$P_F(P) = \dfrac{P(P \cap F)}{P(F)} = \dfrac{2}{3}$

4. On choisit un garçon au hasard. Déterminons la probabilité qu'il soit pour l'utilisation de préservatif
   $P_G(P) = \dfrac{P(P \cap G)}{P(G)} = \dfrac{2}{3}$
5. Comme $P_G(P) = P_F(P) = \dfrac{2}{3}$, alors les garçons utilisent autant des préservatifs que les filles