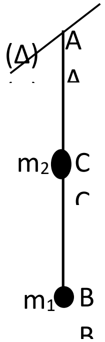
OSCILLATEURS MECANIQUES NON HARMONIQUES

Pendule composé

Exercice n°1 : Un pendule est constitué d'une tige rigide AB de masse négligeable, de longueur L = 0,55 m, suspendue à son extrémité A et portant à l'extrémité B une masse m_1, considérée comme ponctuelle et en son milieu C, une autre masse ponctuelle $m_2 = 2\ m_1$. Le système ainsi constitué peut tourner autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité A.



1. Exprime le moment d'inertie du pendule ainsi constitué en fonction de m_1 et de L.
2. Donne l'expression de la position du centre d'inertie G de ce pendule par rapport au point A en fonction de L.
3. On étudie le mouvement des petites oscillations du pendule dans le champ de pesanteur.

   a) Établis l'équation différentielle du mouvement

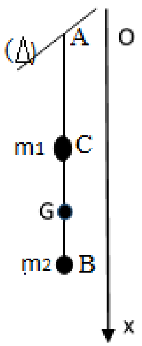
   b) calcule la période propre T_0.

Corrigé :

1- **Calcul du moment d'inertie**

$$J_{S/\Delta} = J_{(m1)} + J_{(m2)} = m_1(AB)^2 + m_2(AC)^2 \quad \mathbf{J_{S/\Delta} = \frac{3}{2} m_1 L^2}$$

2- **Expression du centre d'inertie**



$\overrightarrow{AG} = \dfrac{m_2.\overrightarrow{AC} + m_1.\overrightarrow{AB}}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow AG = \dfrac{m_2 AC + m_1 AB}{m_1 + m_2}$ après projection de la relation vectorielle sur (O,x)

On trouve $\mathbf{AG = \frac{2}{3} L}$

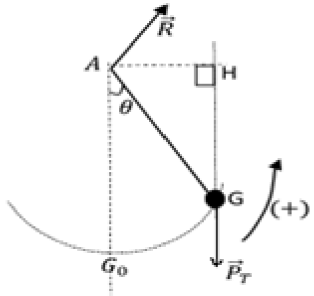
3- **Étude du mouvement du pendule**

a) Dans le R.T.S.G, le pendule de moment d'inertie J est soumis aux actions mécaniques suivantes :

Forces extérieures :

$\vec{P}$ le poids du pendule et $\vec{R}$ la réaction de l'axe de rotation.

D'après le théorème du moment cinétique



$$\sum M(\vec{F}ext/_{\Delta}) = J_{S/\Delta}.\ddot{\theta} \ ; \ M(\vec{P})/_{\Delta} + M(\vec{R})/_{\Delta} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$-\sum m.g.AH = J_{\Delta}.\ddot{\theta} => -m_T.g.AG.sin\theta = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

Soit $\ddot{\theta} + \dfrac{m_T.g.AG}{J_\Delta}\sin\theta = 0$. Pour des oscillations de faible amplitude, $\sin\theta \approx \theta$ et lorsque-on remplace AG et J par leurs expressions, on trouve : $\ddot{\theta} + \dfrac{4g.}{3L}\theta = 0$ avec $m_T = 3\ m_1$.

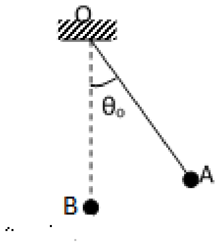
En posant $\omega_0^2 = \dfrac{4.g}{3.L}$, on retrouve l'équation différentielle d'un mouvement de rotation sinusoïdal dont l'une des solutions est de la forme $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4.g}{3.L}}$ et de période propre $\mathbf{T_0 = 2 \times \pi\sqrt{\dfrac{3.L}{4.g}}}$

b) Le calcul de T_0 donne : $\mathbf{T_0 = 1{,}28\ s.}$

Pendule simple

Exercice n°2 : Un pendule simple est constitué par un point matériel A de masse m_A = 50 g suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur l = 50 cm.

À partir de sa position d'équilibre, on écarte le pendule d'un angle θo = 60° et on l'abandonne sans vitesse à l'instant t = 0.



1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, détermine la vitesse linéaire du point matériel:

a) À son passage à la position θ = 30°.

b) À son passage par la verticale et représente ce vecteur vitesse.

2- Calcule la tension du fil à la position θ = 30° et à la verticale B.

Corrigé

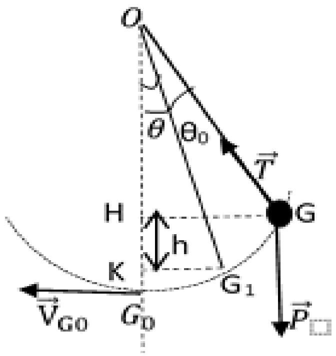
Exercice n°2

1. Vitesse linéaire du point mobile :

1) **Au passage par la position θ = 30°**

Le solide de masse m est soumis dans le R.T.S.G . forces suivantes :

$\vec{P}$ le poids du solide et $\vec{T}$ la tension du fil.



Le T.E.C s'écrit : $\Delta E_C = \sum W\vec{F}_{ext}$

$E_{Cf} - E_{Ci} = W\vec{P} + W\vec{T}$

$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = m.g.h$; h = OK – 0H=OG(cosθ –cosθ_0)

Pour un point matériel J = m.l^2 et $W\vec{T} = 0$

$$\frac{1}{2}m.l^2.\dot{\theta}^2 = m.g.l(\cos\theta - \cos\theta_0) \Leftrightarrow$$

⇨

$$\frac{1}{2}m.V_{G1}^2 = mg.l(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Soit $V_{G1} = \sqrt{2.g.l(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

Pour θ_0 = 60° et θ = 30°, **V_{G1} = 1,91 m.s^{-1}.**

2) Au passage par la verticale c.à.d. à θ = 0°

V_{G0} = 2,24 m.s^{-1}.

2. Tension du fil

$\vec{T} + \vec{P} = m.\vec{a}$ puis en projetant cette relation vectorielle sur la normale, on trouve :

Pour la position θ = 30°

$$T - mg.\cos\theta = m\frac{V_{G1}^2}{l} \Rightarrow T = m\left(g.\cos\theta + \frac{V_{G1}^2}{l}\right)$$

A.N : **T_1 = 0,80 N**

Pour la position B ; θ = 0

$$T - P = m\frac{V_{GO}^2}{l} \Rightarrow T = m\left(g + \frac{V_{G0}^2}{l}\right) ;$$

A.N : T_0 = 1 N