Isométries de l'espace

1.Définition

On appelle isométrie de l'espace ε, toute transformation ponctuelle f qui conserve les distances.
$\forall\ (M,\ N) \in \varepsilon^2$, $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, on a : $M'N' = MN$.

2. Les types d'isométries de l'espace

Les isométries de l'espace se subdivisent en deux groupes : les déplacements et les antidéplacements.

2.1. Les déplacements

Toute isométrie de l'espace qui conserve l'orientation de l'espace est appelé déplacement.
Les déplacements de l'espace sont : la translation, l'identité, la rotation axiale (d'axe (Δ)), la symétrie centrale et le vissage.

2.1.1 La translation

a) Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de ω(où ω désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace).
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de ε dans lui même, qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b) Propriété caractéristique

Soit f une application de ε dans lui même. f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

c) Expression analytique

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, $M(x, y, z)$ un point de ε et $M'(x', y', z')$ son image par t. On a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c. \end{cases}$$

2.1.2 La symétrie centrale et l'identité

• La symétrie centrale de centre $A(x_0, y_0, z_0)$, notée S_A, est l'application de ε dans ε, qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AM'}$.
Elle se définit analytiquement par :

$$S_A(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \\ z' = -z + 2z_0. \end{cases}$$

- L'identité id_ε de ε, est l'application définie telle que : $id_\varepsilon(M) = M' \Longleftrightarrow M = M'$.

2.1.3. La rotation d'axe (Δ) et d'angle θ

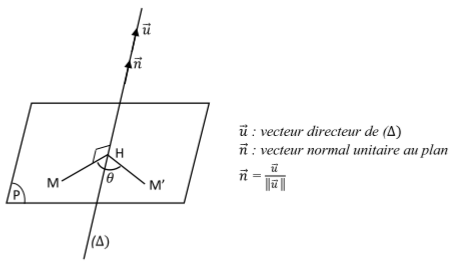
a) Définition

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, (P) un plan perpendiculaire à (Δ) et θ un réel.

On appelle rotation d'axe (Δ) et d'angle θ, notée $R_{(\Delta,\theta)}$, l'application de l'espace qui laisse invariant les points de (Δ) et qui à tout point M non situé sur (Δ) associe son image M' du plan tel que :

$$\begin{cases} HM' = HM \\ (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}) = \theta[2\pi]. \end{cases}$$

où $H \in (P) \cap (\Delta)$.



N.B : Si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$.

b) Éléments caractéristiques de $R_{(\Delta,\theta)}$

$R_{(\Delta,\theta)}$ est caractérisée par l'axe (Δ) et l'angle θ.

- **Axe (Δ) :**
  L'axe (Δ) est l'ensemble des points invariants par la rotation. On a :

$$(\Delta) = inv(R) = \{M \in \varepsilon, R(M) = M\}$$

- **Angle θ :**
  Supposons que l'axe (Δ) se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c. \end{cases}$$

Alors la droite (Δ) passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et est dirigée par $\vec{u}(a, b, c)$.

On détermine l'équation du plan $(\mathcal{P})$, perpendiculaire à (Δ), passant par A. $\vec{u}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P})$ a pour équation: $ax + by + cz + d = 0$.

Soit $M \in (\mathcal{P})$ et M' son image par R. On a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}}{\|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{AM'}\|} \\ \sin\theta = \dfrac{det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}, \vec{n})}{\|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{AM'}\|}. \end{cases} .$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan $(\mathcal{P})$ tel que $\vec{n} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM'}\|$.

Exemple :

Dans l'espace orienté ε rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la rotation f défini par :

$$\begin{cases} x' = -z - 2 \\ y' = -x \\ z' = y - 2. \end{cases}.$$

a) Déterminer l'axe (Δ) de f.
b) Déterminer l'angle θ de f.

Solution

a) Déterminons l'axe (Δ) de f.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - 2 \\ y = -x \\ z = y - 2. \end{cases}.$$

En Posant $z = \lambda$, on a :

$$\begin{cases} x = -\lambda - 2 \\ y = -x \\ \lambda = y - 2 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda - 2 \\ y = \lambda + 2 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Ainsi, l'axe est la droite (Δ) passant par le point $A(-2, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1, 1, 1)$.

b) Déterminant l'angle θ de f.

Soit $(\mathcal{P}) : -x + y + z - 4 = 0$ le plan perpendiculaire à (Δ) passant par $A(-2, 2, 0)$, $M(0, 0, 4)$ un point de $(\mathcal{P})$ et $M'(-6, 0, -2)$ son image par f. On a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} \\ \sin\theta = \frac{det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}. \end{cases}$$

$\overrightarrow{AM}(2, -2, 4)$, $\overrightarrow{AM'}(-4, -2, -2)$, $AM^2 = 24$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = -12$ et $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) = -\frac{36}{\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a :

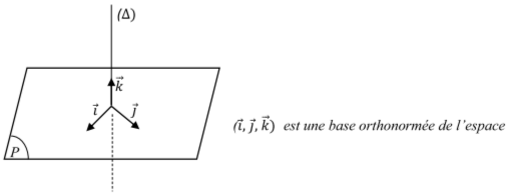
$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}[2\pi].$$

Remarques

- Toute rotation d'axe (Δ) et d'angle π est appelée demi-tour autour de (Δ) ou retournement ;
- Tout demi-tour de l'espace est involutif ;

- La restriction d'une rotation axiale R d'axe (Δ) et d'angle θ à un plan est une rotation de ce plan. Ainsi,

$$R(\Delta,\theta) : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + c_1 \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + c_2 \end{cases} \qquad \vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$$

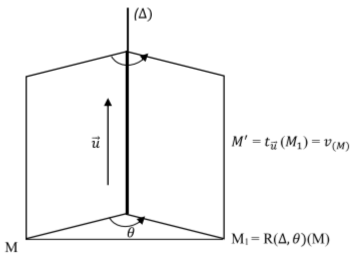


2.1.4. Vissage ou déplacement hélicoïdal

a) Définition

Soit (Δ) un axe de vecteur directeur $\vec{u}$.

On appelle vissage de l'espace, noté f, la composée commutative de la rotation axiale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.



b) Éléments caractéristiques du vissage

Le vissage est caractérisé par l'axe (Δ), l'angle θ de la rotation et aussi par le vecteur $\vec{u}$ de la translation.

- Axe (Δ) : Celui de la rotation. On a :

$$(\Delta) = \left\{M \in (\mathcal{P}); \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}\right\}$$

où $M' = f(M)$, $M'' = f\circ f(M)$.

- Vecteur : Celui de la translation.
Soit $A \in (\Delta)$ tel que $A' = f(A)$. alors $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.

- Angle θ : celui de la rotation.

Pour déterminer l'angle θ, on peut suivre le procédé suivant :

- On trouve l'expression analytique de R : $f = R\circ t_{\vec{u}} \Longleftrightarrow f\circ t_{\vec{u}}^{-1} = R \Rightarrow R = f\circ t_{\vec{u}}^{-1}$.
- On trouve l'équation du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$
- On choisit un point B du plan et on détermine son image B' par R : $R(B) = B'$. Alors :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AB'}\|} \\ \sin\theta = \frac{det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'},\vec{n})}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AB'}\|}. \end{cases}.$$

Exemple :

Dans l'espace orienté ε rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le vissage f défini par :

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = -z+4 \\ z' = y. \end{cases}.$$

a) Déterminer l'axe (Δ).
b) Déterminer son vecteur $\vec{u}$.
c) Déterminer son angle θ.

Solution

a) Déterminons l'axe (Δ) de f.

soit $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ et $M''(x'',y'',z'')$ trois points de ε tels que : $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$.

On a :

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x''-x \\ y''-y \\ z''-z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'+1-x \\ -z'+4-y \\ y'-z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x+1-x \\ -z+4-y \\ y-z \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+2-x \\ -y+4-y \\ -z+4-z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x+1-x \\ -z+4-y \\ y-z \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ Z=2 \\ y=2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=2 \\ z=2. \end{cases}$$

D'où l'axe (Δ) est la droite passant par $A(0,2,2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1,0,0)=\vec{i}$

b) Déterminons son vecteur $\vec{u}$.

On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$, avec $A' = f(A)$, ainsi $\begin{cases} x_{A'} = x_A+1 \\ y_{A'} = -z_A+4 \\ z_{A'} = y_A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 1 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 2. \end{cases}.$

$\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-2 \\ 2-2 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{u} = \vec{i}$.

c) Déterminons son angle θ

Soit $(\mathcal{P})$ le plan orthogonal à (Δ) passant par $A(0,2,2)$.

$\vec{u}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. On a :

$(\mathcal{P}) : ax+by+cz+d=0$, or $\vec{u}=\vec{i}$, ainsi, $x+d=0$, $A\in(\mathcal{P}) \Longleftrightarrow d=0$. D'où $(\mathcal{P}) : x=0$.

Soit $B(0,0,0)$ un point de $(\mathcal{P})$. $B' = f(B) \Longleftrightarrow B'(1,4,0)$. On a $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$t_{\vec{u}}(B) = B_1 \Longleftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \vec{u} \Longrightarrow B_1(1,0,0)$. On a : $\overrightarrow{A'B_1}(0,-2,-2)$. Ainsi,

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\overrightarrow{A'B_1}.\overrightarrow{A'B'}}{\|\overrightarrow{A'B'}\|^2} = \frac{0}{8} = 0 \\ \sin\theta = \frac{det(\overrightarrow{A'B_1},\overrightarrow{A'B'},\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})}{\|\overrightarrow{A'B_1}\|^2} = \frac{8}{8} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

D'où $\quad f = R_{(\Delta,\frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{i}}$.

2.2. Les antidéplacements

On appelle antidéplacement de l'espace, toute isométrie de l'espace qui change l'orientation de l'espace. Ce sont : la symétrie orthogonale-plan ou réflexion par rapport à un plan et la symétrie glissée.

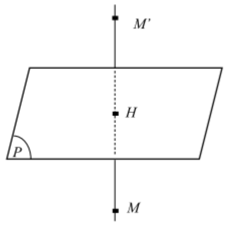
2.2.1. La symétrie orthogonale-plan

a) Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

La symétrie orthogonale-plan de base $(\mathcal{P})$, notée $S_{\mathcal{P}}$, est une application de ε dans ε, qui à tout point M associe le point M', tel que :

- Si $M \in (\mathcal{P})$, alors $M' = M$;



- Si M n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, alors $\begin{cases} (MM') \perp (\mathcal{P}) \quad (1) \\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM} \quad (2) \\ H \in (\mathcal{P}) \quad (3) \end{cases}$

  Le plan $(\mathcal{P})$ est le plan médiateur du segment $[MM']$. H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$ et milieu de $[MM']$.

b) Élément caractéristique de $S_{\mathcal{P}}$

L'élément caractéristique de $S_{\mathcal{P}}$ est le plan $(\mathcal{P})$, qui est l'ensemble des points invariants de $S_{\mathcal{P}}$.

on note : $inv(S_{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P})$.

Exemple

Dans l'espace ε muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + y - z + 1 = 0$. Déterminons la symétrie plane de base $(\mathcal{P})$.

En effet,

Soit $S_{\mathcal{P}}$ cette symétrie plane, $M(x, y, z)$ le point tel que $M'(x', y', z')$ son image par $S_{\mathcal{P}}$ et H le milieu de $[MM']$. Ainsi :

$$S_{\mathcal{P}} : \begin{cases} (MM') \perp (\mathcal{P}) \quad (1) \\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM} \quad (2) \\ H \in (\mathcal{P}) \quad (3) \end{cases}$$

- H milieu de $[MM']$; $H \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$.
- $H \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow x_H + y_H - z_H + 1 = 0 \Longrightarrow \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} + 1 = 0 \quad (4)$.
- $(MM') \perp (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^\star$ et $\vec{n}(1, 1, -1)$. On a :

  $$\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = \lambda \\ z' - z = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases} \quad (5)$$

  (5) dans (4) $\Longrightarrow \frac{x+x+\lambda}{2} + \frac{y+y+\lambda}{2} - \frac{z+z-\lambda}{2} + 1 = 0 \Longrightarrow 3\lambda + 2x + 2y - 2z + 2 = 0$. Ainsi, $\lambda = \frac{1}{3}(-2x - 2y + 2z - 2)$.

En remplaçant λ par $\frac{1}{3}(-2x-2y+2z-2)$ dans (5), on obtient : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}. \end{cases}$

D'où,

$$S_{\mathcal{P}} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

2.2.2. La symétrie glissée

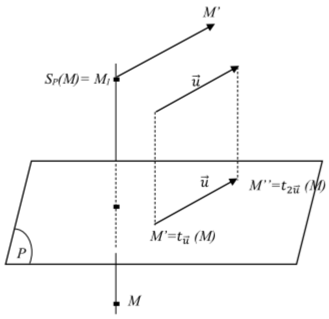
a) Définition

On appelle symétrie glissée, la composée commutative d'une symétrie-plan et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}$ est parallèle au plan de la symétrie.

Notation : Soit f cette symétrie glissée, on a :

$$f = S_{\mathcal{P}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$$

b) Éléments caractéristiques



Les éléments caractéristiques d'une symétrie-plan glissée sont :
- la base $\mathcal{P}$: celle de la symétrie-plan de cette composée ;
- le vecteur $\vec{u}$: celui de la translation.

• Détermination de la base de la symétrie-plan glissée

$(\mathcal{P})$ étant cette base, alors :

$$(\mathcal{P}) = \left\{ M \in \varepsilon ; \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \right\} \quad avec \quad M' = f(M) \;\; et \;\; M'' = f \circ f(M).$$

• Détermination du vecteur de la translation

$$f \circ f = t_{2\vec{u}}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ de la translation est $\vec{u} = \overrightarrow{HH'}$ où $H' = f(H)$ et H point fixe de la base $(\mathcal{P})$.

Exemple
L'espace ε étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la transformation f définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3} \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Calculer $f \circ f$
3. a. Préciser la nature de f
   b. Déterminer les éléments caractéristiques de f

Solution

1. Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

   $f(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = -7 \end{cases}$, ce système est incompatible. D'où l'ensemble des points invariants par f est vide.

2. Calculons $f \circ f$

   $$f \circ f(M) = f[f(M)] \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' + \frac{5}{3} \\ y'' = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' - \frac{5}{3} \\ z'' = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{7}{3} \end{cases}$$

   $$\Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{3}) + \frac{5}{3} \\ y'' = \frac{2}{3}(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}) - \frac{2}{3}(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{3}) - \frac{5}{3} \\ z'' = \frac{2}{3}(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}) - \frac{2}{3}(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{3}) + \frac{7}{3} \end{cases}$$

   $\Longrightarrow f \circ f : \begin{cases} x'' = x + \frac{8}{3} \\ y'' = y - \frac{8}{3} \\ z'' = z + \frac{16}{3} \end{cases}$. D'où $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{16}{3})$

3. a. Précisons la nature de f

   f étant une isométrie qui n'a aucun point invariant telle que $f \circ f = t_{\vec{u}}$, alors f est une symétrie glissée c'est - à - dire la composée d'une symétrie plane et d'une translation.

   b. Déterminons les éléments caractéristiques de f

   Base : $(\mathcal{P})$

   $$M \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \quad avec \quad M' = f(M) \ \ et \ \ M'' = f \circ f(M).$$

   $$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' - x = 2(x' - x) \\ y'' - y = 2(y' - y) \\ z'' - z = 2(z' - z) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + \frac{8}{3} - x = 2[\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3} - x] \\ y - \frac{8}{3} - y = 2[\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} - y] \\ z + \frac{16}{3} - z = 2[\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} - z] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4x+4y+4z+2=0 \\ 4x-4y-4z-2=0 \\ 4x-4y-4z-2=0 \end{cases}$$

D'où la base $\mathcal{P}$: $2x-2y-2z-1=0$
Le vecteur $\vec{v}$:

$\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$. D'où $\vec{v}(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{8}{3})$.

2.3. Classification des isométries par points invariants

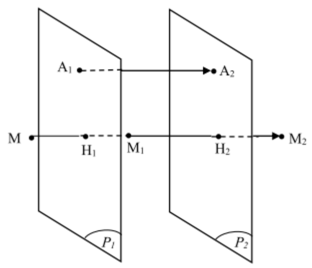
Soit E l'ensemble des points invariants par une isométrie f de l'espace. On a le tableau suivant :

Ensemble des points invariants par f	*Déplacements*	*Antidéplacements*
$E=\varepsilon$	$f=Id_{\varepsilon}$	
E est un plan (P)	$f=Id_{\varepsilon}$	*f est la réflexion*
E est une droite (Δ)	*f est la rotation d'axe* (Δ) *ou* $f=Id_{\varepsilon}$	
E est le singleton A		*f est la symétrie de centre A*
E est l'ensemble vide	*f est une translation de vecteur non nul ou f est vissage*	*Symétrie glissée-plan*

3. Composée de deux symétries orthogonales par rapport à un plan

3.1. Composée de deux réflexions de plans parallèles

Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans parallèles, on désigne par $S_{\mathcal{P}_1}$ et $S_{\mathcal{P}_2}$ les réflexions de plans respectifs $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
La composée $S_{\mathcal{P}_1}\circ S_{\mathcal{P}_2}$ est une translation de vecteur normal aux deux plans.



Démonstration
Soit A_1 un point de $(\mathcal{P}_1)$ et A_2 son projeté orthogonal sur $(\mathcal{P}_2)$. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Soit M un point de l'espace, M_1 son image par $S_{\mathcal{P}_1}$ et M_2 l'image de M_1 par $S_{\mathcal{P}_2}$.

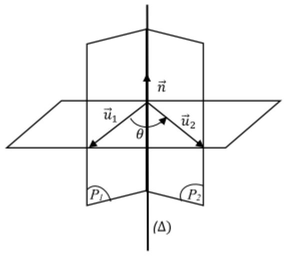
On désigne par H_1 et H_2 les milieu respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M_2]$. On a :
$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{H_1M_1}+2\overrightarrow{M_1H_2}=2\overrightarrow{H_1H_2}=2\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\text{D'où,}\qquad S_{\mathcal{P}_2}\circ S_{\mathcal{P}_1}=t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}.$$

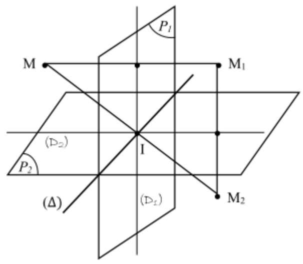
3.2. Composée de deux réflexions de plans sécants

Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans sécants selon la droite (Δ). La composée $S_{\mathcal{P}_2} \circ S_{\mathcal{P}_1}$ est une rotation d'axe (Δ) et d'angle $\theta = 2(\widehat{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2})$. On note :

$$S_{\mathcal{P}_2} \circ S_{\mathcal{P}_1} = R_{(\Delta,\theta)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \theta = 2(\vec{u}_1, \vec{u}_2)[2\pi] \\ (\Delta) = (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$



En particulier, la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires est un demi-tour d'axe (Δ) ou symétrie orthogonale d'axe (Δ).



Remarque : $S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}} = Id_{\varepsilon}$.

4. Applications

Exercice 1 :
L'espace ε est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application ponctuelle f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 12) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 24) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 12) \end{cases} .$$

1. Montrer que f est une isométrie
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de f
3. a. En déduire la nature de f
   b. Caractériser f

Solution 1 :

1. Montrons que f est une isométrie
   Soit $M(x, y, z)$ et $N(a, b, c)$ deux points de l'espace ε, $M'(x', y', z')$ et $N(a', b', c')$ leurs images respectives par f.

   f est une isométrie si $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{M'N'}\|$

$$\overrightarrow{M'N'}\begin{pmatrix}a'-x'\\ b'-y'\\ c'-z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(2a-2b-c)-\frac{1}{3}(2x-2y-z)\\ \frac{1}{3}(2a-b-2c)-\frac{1}{3}(2x-y-2z)\\ \frac{1}{3}(-a-2b+2c)-\frac{1}{3}(-x-2y+2z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(a-x)-\frac{2}{3}(b-y)-\frac{1}{3}(c-z)\\ -\frac{2}{3}(a-x)-\frac{1}{3}(b-y)-\frac{2}{3}(c-z)\\ -\frac{1}{3}(a-x)-\frac{2}{3}(b-y)+\frac{2}{3}(c-z)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{M'N'}\|^2 &= \tfrac{4}{9}(a-x)^2+\tfrac{4}{9}(a-x)^2+\tfrac{1}{9}(a-x)^2+\tfrac{4}{9}(a-y)^2+\tfrac{1}{9}(b-y)^2+\tfrac{4}{9}(b-y)^2+\\ &\quad +\tfrac{1}{9}(c-z)^2+\tfrac{4}{9}(c-z)^2+\tfrac{4}{9}(c-z)^2\\ &=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\end{aligned}$$

On a : $\|\overrightarrow{M'N'}\|^2=\|\overrightarrow{MN}\|^2 \Longrightarrow \|\overrightarrow{M'N'}\|=\|\overrightarrow{MN}\|$. D'où f est une isométrie.

2. Déterminons l'ensemble des points invariants de f

   Posons $f(M)=M$ c'est - à dire $x'=x$, $y'=y$ et $z'=z$. On :

$$\begin{cases}3x=2x-2y-z+12\\ 3y=2x-y-2z+24\\ 3z=-x-2y+2z+12\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+2y+z-12=0\\ 2x+4y+2z-24=0\\ x+2y+Z-12=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+2y+z-12=0\\ x+2y+z-12=0=0\\ x+2y+Z-12=0\end{cases}.$$

   Le système se réduit en une seule équation $x+2y+z-12=0$. Alors l'ensemble des points invariants est le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x+2y+z-12=0$

3. a. Déduisons la nature de f

   L'ensemble des points invariants de f étant le plan $(\mathcal{P})$, alors f est une symétrie orthogonale du plan.

   b. Élément caractéristique de f

   C'est le plan $(\mathcal{P})$: $x+2y+z-12=0$

Exercice 2 :

L'espace ε est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la rotation R qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ telle que :

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z'=\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

- Déterminons les éléments caractéristiques de R.

  - L'axe (Δ).

$$M\in(\Delta)\Longleftrightarrow R(M)=M\Longleftrightarrow\begin{cases}x=x\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=x\\ (2-\sqrt{2})y+\sqrt{2}z=2-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}y+(2-\sqrt{2})z=-\sqrt{2}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y+(\sqrt{2}+1)z=1\\ y-(\sqrt{2}-1)z=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow z=0,\quad y=1\text{ , ainsi, }\begin{cases}x=\lambda\\ y=1\\ z=0.\end{cases}$$

  (Δ) est la droite passant par le point $A(0,1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{i}$.

  - Angle θ.

Soit g la restriction de f au plan (O, y, z), on :

$$g : \begin{cases} y' = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z' = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ainsi

$$g : \begin{cases} y' = \cos\frac{\pi}{4}y - \sin\frac{\pi}{4}z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z' = \cos\frac{\pi}{4}y + \sin\frac{\pi}{4}z - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 :

L'espace ε est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application ponctuelle f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = z + 2 \\ y' = x - 1 \\ z' = y - 1 \end{cases} .$$

1. Montrer que f est une isométrie
2. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques

Solution 3 :

1. Montrons que f est une isométrie.

   Soit $M'(x', y', z')$ et $N'(a', b', c')$ les images respectifs de $M(x, y, z)$ et $N(a, b, c)$.

   $M'N'^2 = (a' - x')^2 + (b' - y')^2 + (c' - z')^2 = (c + 2 - z - 2)^2 + (a - 1 - x + 1)^2 + (b - 1 - y + 1)^2 = (c - z)^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 = MN^2$.

   $M'N'^2 = MN^2$, ainsi f est une isométrie.

2. Nature et éléments caractéristiques de f.

   - Ensemble des points invariants par f

     $$f(M) = M \iff \begin{cases} x = z + 2 \\ y = x - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 2 \\ y - x = -1 \\ z - y = -1 \end{cases} \Longrightarrow\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} .$$

     Alors f est une rotation.

   - Déterminons l'angle de la rotation

     L'axe (Δ) de la rotation a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$ et passe par le point $(1, 0, -1)$.

     Déterminons l'équation du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point H et perpendiculaire à l'axe (Δ).

     Ainsi, $(\mathcal{P}) : x + y + z = 0$.

     Soit $A(1, -2, 1)$ un point de $(\mathcal{P})$ et $A'(3, 0, -3)$son image par R . $\overrightarrow{HA'}(2, 0, -2)$, $\overrightarrow{HA}(0, -2, 2)$. On a : $HA^2 = 8$ et $HA'^2 = 8$.

     $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = -4$ et $det(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HA'}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) = 4\sqrt{3}$.

     Soit θ une mesure de l'angle de la rotation de f.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 4 :

L'espace ε est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la transformation ponctuelle f qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = y+3 \\ y' = x-2 \\ z' = -z \end{cases} .$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants de f
2. On admet que f est un vissage, déterminer les élément caractéristiques f.

Solution 4 :

1. Ensemble des points invariants de f.

   $$f(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ y = x-2 \\ z = -z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y = 3 \\ x-y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

   Le système étant incompatible, alors l'ensemble des points invariants par f est vide.

2. Éléments caractéristiques de f

   - **L'axe** (Δ)

     $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'M''}$ avec $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$, on a :

     $$\begin{cases} x'-x = x''-x' \\ y'-y = y''-y' \\ z'-z = z''-z' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2}+y \\ 2x-2y = 5 \\ z = 0 \end{cases} .$$

     Posons $y = \lambda$, on a : $\begin{cases} x = \frac{5}{2}+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

     (Δ) est une droite passant par $A(\frac{5}{2},0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1,0)$

   - **Angle** θ

     Déterminons l'équation du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et perpendiculaire à l'axe (Δ).

     On trouve, $(\mathcal{P}) : x+y-\frac{5}{2} = 0$.

     Déterminons l'expression de la rotation R

     $f = t \circ R \Longrightarrow R = f \circ t^{-1}$.

$$t_{-\vec{u}} : \begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2} \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \\ z'' = z' \end{cases}$$

$$R = t_{-\vec{u}} \circ f : \begin{cases} x' = y + \frac{5}{2} \\ y' = x - \frac{5}{2} \\ z' = -z \end{cases}$$

Soit $B(0, \frac{5}{2}, 0)$ un point de $(\mathcal{P})$ et $B'(5, -\frac{5}{2}, 0)$ son image par R.

$\overrightarrow{AB}(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)$, $\overrightarrow{AB'}(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0)$. On a : $AB^2 = \frac{25}{2}$ et $AB'^2 = \frac{25}{2}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = -\frac{25}{2}$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) = 0$.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta = \pi[2\pi]$

- **Le vecteur $\vec{v}$ de la translation**

  Soit A' l'image de A par f.

  $f(A) = A' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = \frac{1}{2} \\ z' = 0 \end{cases}$; $A' \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} 3 - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

  D'où $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur de la translation.