COURBES PARAMÉTRÉES

1.1 Rappels

1.1.1 Fonction paire

Soit f une fonction définie sur E_f, on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
f est une fonction paire si $\forall\ x \in E_f,\ -x \in E_f\ ;\ f(-x) = f(x)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

1.1.2 Fonction impaire

Soit f une fonction définie sur E_f, on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
f est une fonction impaire si $\forall\ x \in E_f,\ -x \in E_f\ ;\ f(-x) = -f(x)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction impaire est symétrique par rapport à origine du repère.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

1.1.3 Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur E_f.
f est périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$ si $\forall\ x \in E_f$, $x + T \in E_f$; $f(x+T) = f(x)$.

1.2 Introduction

On considère le plan rapporté un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Un point M se déplace dans le plan. A chaque t appartenant à un intervalle de temps I, la position du point M est donnée par les coordonnées $(x(t), y(t))$.
M décrit une courbe $(\mathscr{C})$ appelée trajectoire.
Le système $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ est une représentation paramétrique des coordonnées de M.

Exemple

Soit $M(x,y)$ un point du segment $[AB]$, avec $A(2,-1)$ et $B(-1,3)$.
M est un point du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, les points A, B et M sont alignés.
On a : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k(-1-2) \\ y + 1 = k(3+1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$ avec $k \in [0,1]$
Ce système est une représentation paramétrique du segment $[AB]$.

1.3 Courbes paramétrés

1.3.1 Définition d'une courbe paramétrée

Soit un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
On appelle courbe paramétrée $(\mathscr{C})$, l'ensemble des points $M(t)$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in I$
où f et $g$sont deux fonctions de la variables t, définies sur I à valeurs réelles.
Ces équations sont appelées équations paramétriques de $(\mathscr{C})$.
On note aussi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I$

NB : si l'on veut que cette définition ait un sens, il faut que $x(t)$ et $y(t)$ existent simultanément.

Exemples

▷ L'application $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle trigonométrique.

▷ L'application $t \longmapsto (at+b, ct+d)$ paramètre une droite si $(a,c) \neq (0,0)$.

▷ L'application $t \longmapsto (x, f(x))$ paramètre le graphe de la fonction f.

Remarques

▷ Une courbe peut admettre plusieurs représentations paramétriques.

▷ On peut parfois, en éliminant le paramètre t entre les deux équations, obtient y comme fonction de x et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une relation $y = h(x)$.

1.3.2 Définition de la fonction vectorielle

On appelle fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$, la fonction définie par :

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto F(t) = \overrightarrow{OM}(t) = f(t)\,\overrightarrow{i} + g(t)\,\overrightarrow{j}$$

.

1.4 Étude d'une courbe paramétrée.

L'étude d'une courbe paramétrée comprend éventuellement les étapes suivantes :

▷ Domaine de définition ;

▷ Tableau de variation ;

▷ Points remarquables ;

▷ Étude des branches infinies ; ▷ Représentation graphique.

1.4.1 Domaine de définition

Le domaine de définition D de la courbe $(\mathscr{C})$ est l'intersection des domaines de définition D_x et D_y des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On a donc $D = D_x \cap D_y$. On s'efforcera ensuite, si possible, de réduire le domaine d'étude de la courbe, de plusieurs manières.

a) Par périodicité

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$
alors F est périodique de T c'est-à-dire que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période T.

Remarque

▷ Soit $T_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $T_2 \in \mathbb{R}_+^*$, si $\begin{cases} x(t+T_1) = x(t) \\ y(t+T_2) = y(t) \end{cases}$
alors on cherche la période commune $T = PPCM(T_1, T_2)$.
▷ Dans la pratique, si F est périodique de période T, l'étude de la courbe se fait dans un intervalle de longueur T. Par exemple $[t_0,\ t_0 + T]$ avec $t_0 \in D$.

b) Par la parité des fonctions x(t) et y(t)

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont paires ou impaires, on pourra réduire le domaine d'étude à $t \geq 0$, puis compléter le tracé de la courbe par une ou plusieurs symétries.

Remarque

On peut, bien entendu, généraliser cet énoncé au cas où le domaine de définition est symétrique par rapport à un réel α, et où les fonctions $t \longmapsto x(t+\alpha)$, $t \longmapsto y(t+\alpha)$ ont des propriétés de parité.

c) Éléments de symétries

Soit $M(t) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$; $M(-t) : \begin{cases} x(-t) \\ y(-t) \end{cases}$; $M(\pi - t) : \begin{cases} x(\pi - t) \\ y(\pi - t) \end{cases}$; $M(\pi + t) : \begin{cases} x(\pi + t) \\ y(\pi + t) \end{cases}$
des points de la courbe $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi + t) = x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}$,
alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox) : $S_{(Ox)}$.
▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = y(t) \end{cases}$,

alors les points $M(-t)$, $M(\pi-t)$ et $M(\pi+t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) : $S_{(Oy)}$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = -y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi+t) = -x(t) \\ y(\pi+t) = -y(t) \end{cases}$,
alors les points $M(-t)$, $M(\pi-t)$ et $M(\pi+t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'origine du repère O : $S_{(O)}$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont confondus.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice : $(\mathscr{D}) : y = x$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice : $(\mathscr{D}') : y = -x$.

1.4.2 Tableau de variation

On étudie les variations de x et y lorsque t décrit E_C.
Les résultats sont rassembles dans un tableau de variations commun.

t	si possibles les valeurs de t
$x'(t)$	signe de la dérivée
$x(t)$	sens de variation
$y'(t)$	signe de la dérivée
$y(t)$	sens de variation

On pourra compléter le tableau des dérivées par une ligne donnant les valeurs de $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ pour les valeurs de t figurant déjà dans ce tableau.

1.4.3 Tangente à une courbe paramétrée

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ une courbe paramétrée définie par : $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}$, $t \in I$ où f et g sont deux fonctions dérivables en t_0. On a au point $M(f(t_0), g(t_0))$ une tangente colinéaire au vecteur $F'(t_0) = f'(t_0)\overrightarrow{i} + g'(t_0)\overrightarrow{j}$ s'il n'est pas nul.

Dans les autres cas, on a :

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) \neq 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente verticale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) \neq 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente horizontale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = a \neq 0 \\ y'(t_0) = b \neq 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente oblique.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$
alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente horizontale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \infty$
alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente verticale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = a \neq 0$
alors $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

1.4.4 Étude des branches infinies

Soit $t_0 \in E_C$, c'est-à-dire $t_0 \in E_x$ et $t_0 \in E_y$

▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (x(t); y(t)) = (\alpha; \infty)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote verticale $(\mathscr{C})$.

▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (x(t); y(t)) = (\infty; \beta)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = \beta$ est asymptote horizontale $(\mathscr{C})$.

▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = (\infty, \infty)$, on étudie $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

• $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \infty$, alors $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

• $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

• $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ où $a \in \mathbb{R}^*$, on examine la limite alors $(\mathscr{C})$: $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)]$

∗ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = 0$, alors $(\mathscr{C})$ admet une une asymptote oblique d'équation $y = ax$.

∗ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$ où $b \in \mathbb{R}^*$, alors $(\mathscr{C})$ admet une une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

1.4.5 Représentation graphique

a) Intersection avec les axes du repère

▷ Si $(\mathscr{C}) \cap (Ox)$, on a $y(t) = 0$
▷ Si $(\mathscr{C}) \cap (Oy)$, on a $x(t) = 0$

b) Comment tracer la courbe

▷ Tracer d'abord les asymptotes et les points connus.
▷ Tracer ensuite la courbe en lisant le tableau de gauche à droite. regarder comment évoluent les coordonnées des points en fonction de t.
▷ Noter sur le dessin les valeurs de t aux endroits remarquables.

Exercice 1

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.
2. Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.
3. a) Par quelle transformation ponctuelle le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   b) En déduire que F peut être étudiée sur l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser le tableau de variation de F.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 2

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.
2. a) Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.

b) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?

c) Par quelle isométrie le point $M(\pi - t)$ se déduit-il de $M(t)$?

d) préciser le domaine d'étude de F.

3. Étudier les variations de F.

4. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction F.

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$,ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées sont définies par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\ln|t| \\ y(t) = t\ln|t| \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$

1. a) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?

   b) Par quelle isométrie le point $M(\frac{1}{t})$ se déduit-il de $M(t)$?

2. En déduit que l'intervalle $\mathbb{R}^*$ peut etre réduit à $]0;1]$.

3. Tracer $(\mathscr{C})$.

Solution 1

1. Définissons la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.

   On appelle fonction vectorielle F de la variable réelle t associée à $(\mathscr{C})$, la fonction définie par :

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto F(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$$

   . où $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.

2. Montrons que F est périodique de période $T = 2\pi$.

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = -1 + 2\cos(t+2\pi) = -1 + 2\cos t \\ y(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$$

   D'où F est périodique de période $T = 2\pi$.

3. (a) Précisons la transformation ponctuelle ou le point $M(-t)$ se déduit de $M(t)$.

$$\begin{cases} x(-t) = -1 + 2\cos(-t) = x(t) \\ y(-t) = \sin(-t) = y(t) \end{cases} \Longrightarrow M(-t) \text{ se déduit de } M(t) \text{ par symétrie}$$

   par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire (Ox).

(b) Déduisons que F peut être étudier sur $[0;\pi]$

F étant périodique de période $T=2\pi$, alors elle peut être étudier sur $[-\pi;\pi]$ et de plus l'axe des abscisses est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors F peut-être étudiée sur $[0;\pi]$.

4. Étudions les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dressons le tableau de variation de F.

▷ Pour $x(t)$:

On a : $x(t)=-1+2\cos t$; $[0;\pi]$

• Calculons $x(0)$ et $x(\pi)$

$x(0)=1$ et $x(\pi)=-3$

• Dérivée et signe

$x'(t)=-2\sin t$

$\forall\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $x'(t)\leq 0$

• Tableau de variation

t	0		π
$x'(t)$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	-3

▷ Pour $y(t)$:

On a : $y(t)=\sin t$; $[0;\pi]$

• Calculons $y(0)$ et $y(\pi)$

$y(0)=0$ et $y(\pi)=0$

• Dérivée et signe

$y'(t)=\cos t$

$\forall\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $y'(t)\geq 0$ et $\forall\ t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$; $y'(t)\leq 0$

• Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	0

- Dressons le tableau de variation de F

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$-$		$-$	
$x(t)$	1	↘	-1	↘	-3
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	0

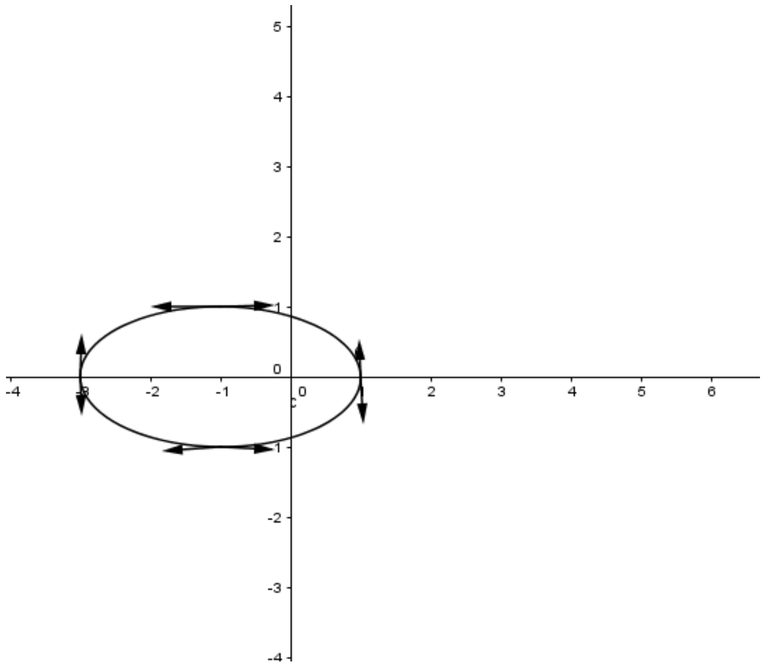
5. Traçons $(\mathscr{C})$
   - Points d'intersection avec les axes

   On a : $A\left(O;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   - Tangente

   ▷ En $t=0$; $\begin{cases} x'(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$; tangente verticale

   ▷ En $t=\dfrac{\pi}{2}$; $\begin{cases} x'(\frac{\pi}{2})=-2 \\ y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$; tangente horizontale

   ▷ En $t=\pi$; $\begin{cases} x'(\pi)=0 \\ y'(\pi)=-1 \end{cases}$; tangente verticale



5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
2
3
4
5
6