Table des matières

Chapitre 1

SUITES NUMÉRIQUES

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

On appelle suite numérique, toute application $U : I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto U_n$

__NB__ : I est une partie de $\mathbb{N}$.

__**Exemple**__ : $U : I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto U_n = 2 + 3n$

1.1.2 Notation

On note une suite par : (U_n) ou $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.1.3 Vocabulaire

U_n se lit " U indice n "

__**Exemple**__ : $U_n = \frac{1}{2}n + 6$

1.1.4 Calcul des termes d'une suite

__**Suite explicite**__ : $U_n = f(n);\ n \in \mathbb{N}$

Activité : 1

On donne : $U_n = 3n + 2$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Calculer U_0 ; U_1 ; U_2 et U_{n+1}

__**Suite de récurrente d'ordre 1**__

__**Activité 2**__

On donne : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \end{cases}$
Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4

1.1.5 Sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique.

Suite croissante

On dit que (U_n) est une suite croissante si $\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$

NB : (U_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow \forall\ n\ \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$

. **Suite décroissante**

On dit que (U_n) est une suite décroissante si $\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \leq 0$

NB : (U_n) est strictement décroissante $\forall$; $n\ \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n < 0$

Suite constante ou stationnaire

On dit que $(U_n$ est une suite constante si $\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = 0$

Exercice

Étudier le sens de variation des suites suivantes : $U_n = 3n + 4$; $V_n = \frac{1}{n+1}$ et $W_n = 2019$.

1.1.6 Convergence d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique et l un nombre réel.

- (U_n) est dite convergente si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

- Si la limite quand n tend vers $+\infty$ de (U_n) est infinie ou n'existe pas, on dit que la suite (U_n) est **divergente**.

Exercice

Étudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n^2+4}$.

1.2 Suite arithmétique

1.2.1 Définition

Soit (U_n) une suite numérique et r un nombre réel.

On dit que (U_n) est une suite arithmétique si $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$ ou $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$

NB : Le réel r est appelé raison de la suite (U_n).

Exemple : On donne $U_n = 2n + 3$

On a : $U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 2 + 3$

$\Rightarrow U_{n+1} = \underbrace{2n+3}_{U_n} + 2$

$\rightarrow U_{n+1} = U_n + 2$

D'où (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

1.2.2 Sens de variation d'une suite arithmétique

On a : $U_{n+1} - U_n = r$

- Si $r > 0$, alors (U_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors (U_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors (U_n) est constante.

1.2.3 Terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

$\boxed{U_n = U_p + (n-p) \times r}$ est son terme général.

Avec p est l'indice du premier terme.

1.2.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique.

On pose $S_n = U_p + U_{p+1} + ... + U_n$

On a : $\boxed{S_n = \frac{(id - i_{p+1})(U_p + U_n)}{2}}$

Avec : $id =$ indice du dernier terme

$i_p =$ indice du premier terme

$U_p =$ Suite du premier terme

$U_n =$ Suite du dernier terme

Exemple : On donne $U_n = 2n + 3$ et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

$S_n = \frac{(n-0+1)(U_0+U_n)}{2}$

$= \frac{(n+1)(3+2n+3)}{2} = \frac{(n+1)(2n+6)}{2}$

D'où : $\underline{S_n = (n+1)(n+3)}$

Exercice

Soit (U_n) une suite numérique définie par : $U_n = \frac{1}{4}n + 3\,; \forall\ n \in \mathbb{N}$

1- Montre que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2- En déduire les sens de variation de (U_n)

3- On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Etudier la convergence de S_n.

1.2.5 Convergence d'une suite arithmétique :

On a : $U_n = U_p + (n-p) \times r$ le terme général de la suite (U_n).

On distingue deux cas.

1^{er} cas : si $r < 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to +\infty} U_n = -\infty}$ (U_n) est divergente.

2^{e} cas : si $r > 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$ (U_n) est divergente

D'une manière générale, une suite arithmétique n'est pas convergente.

Exercice :

On donne $U_n = 3n + 5$

1) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Etudier la convergence de la suite (U_n).

1.3 Suite géométrique

1.3.1 Définition

Soit (V_n) une suite numérique et q un nombre réel.

On dit que (V_n) est une suite géométrique de raison q si $\boxed{V_{n+1} = qV_n}$ ou $\boxed{\frac{V_{n+1}}{V_n} = q}$ q est la raison de la suite (V_n).

Exemple :

$V_n = 3^n$

On a : $V_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3V_n$

$\Rightarrow V_{n+1} = 3V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

1.3.2 Sens de variation d'une suite géométrique.

On a : $V_{n+1} = qV_n$

- Si $0 < q < 1$; alors (V_n) est croissante.
- Si $q > 1$; alors (V_n) est décroissante.

1.3.3 Terme général

Soit (V_n) une suite géométrique de raison q.

On a : $\boxed{V_n = V_p q^{n-p}}$

p=indice du premier terme.

1.3.4 Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (V_n) une suite géométrique de raison q.

On pose $S_n = V_p + v_{P+1} + ... + V_n$

On a : $\boxed{S_n = \frac{V_p\left(1-q^{id-i_{p+1}}\right)}{1-q}}$

1.3.5 Convergence :

On a : $V_n = V_p q^{n-p}$

Si $q > 1$; $\lim\limits_{n \to + \infty} q^n = +\infty$

Si $q = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

Si $-1 < q < 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Si $q \leq -1$; alors (q^n) n'a pas de limite.