Table des matières

Chapitre 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.1 GÉNÉRALITÉS

Activité

Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -\mathrm{e}^{2x}$.

1. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.
2. Trouver une relation entre :
   (a) $g'(x)$ et $g(x)$.
   (b) $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$.

1.1.1 Définition

On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple

$y' - 3y = 0$; $y'' + 2y' + 3y = 0$

1.1.2 Ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue, ayant un coefficient non nul dans cette équation différentielle.

1.1.3 Exemples

$2y'' + 4y' + -y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 ;
$f'(x) + 6f(x) = 0 \Longrightarrow$ équation différentielle d'ordre 1 ;

$y''' + 3y'' - 2y' + 6 = \mathrm{e}^{2x}$, est une équation différentielle d'ordre 3.

Remarque

Une équation différentielle est dite homogène ou sans second membre lorsque le second membre de cette équation différentielle est nul.

1.2 Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation sur un intervalle ouvert I, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation différentielle.

Remarque

Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est appelée solution sur I de cette équation différentielle.

1.2.1 Solution d'une équation différentielle

Soit y une fonction qui dépend de x, on pose $y = f(x)$.
La solution d'une équation différentielle est toute fonction $y = f(x)$ telle que l'équation différentielle soit satisfaite.

a) Solution générale

Une solution de l'équation différentielle est dite générale si elle dépend :
▷ d'une constante lorsqu'elle est du premier degré,
▷ de deux constantes lorsqu'elle est du second degré.

b) Solution particulière

Une solution de l'équation différentielle est dite particulière lorsqu'elle est une fonction qui vérifie directement l'équation et est indépendante des constantes.

1.3 Équations différentielles du premier ordre

1.3.1 Définition

Une équations différentielles du premier ordre est toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure la première dérivée.

1.3.2 Résolution d'une équations différentielles du premier ordre

a) Équation différentielle de la forme y'=0

La solution générale de l'équation différentielle $y' = 0$ est une constante.
En effet, $y' = 0 \Longrightarrow y = c\,;\, c \in \mathbb{R}$.
<u>Conclusion</u> : La solution générale de l'équation différentielle $y' = 0$ est de la forme $y = c\,;$ $c \in \mathbb{R}$.

b) Équation de la forme y'=f(x), où f est une fonction sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$.
$y' = f(x) \Longrightarrow \displaystyle\int y'dx = \int f(x)dx + c \Longrightarrow y = F(x) + c$ avec F la primitive de f sur I et c un réel.
<u>Conclusion</u> : La solution générale de l'équation différentielle $y' = f(x)$ est de la forme $y = F(x) + c\,;\, c \in \mathbb{R}$

Exemples

Intégrer les équations différentielles suivantes : $a)$ $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $b)$ $y' = \tan x - \cos 2x$.

Solution

Intégrons les équations différentielles suivantes
$a)$ $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, les fonctions $\dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$,
alors $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \Longrightarrow \displaystyle\int y'dx = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx + K \Longrightarrow y = -\int -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx + K \Longrightarrow y = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + K$.
D'où $y = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + K$
$b)$ $y' = \tan x - \cos 2x$, les fonctions $x \longmapsto \tan x$ et $x \longmapsto \cos 2x$ sont respectivement continues sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{R}$.

On a : $y' = \tan x - \cos 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \cos 2x \Longrightarrow \displaystyle\int y'dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx - \int \cos 2x dx + C$
D'où $y = -\ln|\cos x| - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

c) Équation de la forme ay'+by=0 avec a $\in \mathbb{R}^*$ et b$\in \mathbb{R}$

Soit à résoudre l'équation (E) : $ay' + by = 0$

- La solution nulle est solution de (E).
- Soit y une solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

En effet ;

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \Longleftrightarrow \int \frac{y'}{y}dx = \int -\frac{b}{a}dx + c \\ &\Longleftrightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + C \Longleftrightarrow |y| = \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x + c} \Longleftrightarrow y = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x} \end{aligned}$$

avec $\lambda = \pm \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}^*$.
<u>Conclusion</u> : La solution générale de (E) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
D'où $\boxed{y = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque

Toute équation de la forme $ay' + by = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constantes sans second membre.

Théorème

L'équation différentielle $ay' + by = 0$, admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $y(x_0) = y_0$ (appelée condition initiale).

Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$ vérifiant $f(0) = 2$.

Solution

$2y' + 3y = 0 \Longrightarrow \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int -\frac{3}{2}dx + c \Longrightarrow y = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ avec $\lambda = \pm \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}^*$.
or $y = f(x) \Longrightarrow f(0) = 2 \Longrightarrow \lambda = 2$
D'où $\boxed{f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}}$.

1.4 Équations différentielles du second ordre

1.4.1 Définition

Une équation différentielle du second ordre est toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure la dérivée seconde.

1.4.2 Résolution d'une équations différentielles du second ordre

a) Équation de la forme y"=0

En effet ; $y'' = 0 \Longleftrightarrow y' = c_1\,;\, c_1 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = c_1x + c_2\,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y'' = 0$ est de la forme $y = c_1x + c_2\,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Équation de la forme y"=f(x) ; f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On définit F la primitive de f sur I et G celle de F sur I.
En effet ; $y'' = f(x) \Longrightarrow \int y''dx = \int f(x)dx + c_1 \Longrightarrow y' = F(x) + c_1\,;\, c_1 \in \mathbb{R}$
$\int y'dx = \int (F(x) + c_1)dx + c_2\,;\, c_1; c_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = G(x) + c_1x + c_2\,;\, c_1; c_2 \in \mathbb{R}$.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y'' = f(x)$ est $y = G(x) + c_1x + c_2\,;\, c_1; c_2 \in \mathbb{R}$

Exemple

Résoudre les équations différentielles suivantes : $a)\ y'' = x + \frac{1}{x^2}\,;\ b)\ y'' = 2\sin^2 x$

Solution

Résolvons les différentielles suivantes :
- $a)\ y'' = x + \frac{1}{x^2}$

La fonction $x \longmapsto x + \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
On a : $y'' = x + \frac{1}{x^2} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = \frac{1}{6}x^3 - \ln|x| + c_1x + c_2\,;$ $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$
- $b)\ y'' = 2\sin^2 x$

On a : $b)$ $y'' = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Longrightarrow y' = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + c_1\,;\ c_1 \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}\cos 2x + c_1 x + c_2\,;\ c_1; c_2 \in \mathbb{R}$

c) Équation de la forme ay"+by'+cy=0 ; a $\in \mathbb{R}^*$, b ; c $\in \mathbb{R}$

Soit à résoudre l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.

Soit $y : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on a : $y' = r\mathrm{e}^{rx}\,;\ y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$.

Alors $ay''+by'+cy = 0 \Longrightarrow (ar^2+br+c)\mathrm{e}^{rx} = 0$, or $\mathrm{e}^{rx} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow ar^2+br+c = 0$.

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ et admet pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

On distingue trois cas :

▷ premier cas : si $\Delta > 0$

alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 telles que $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\ r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La solution générale de l'équation différentielle est : $y = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}\,;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

▷ deuxième cas si $\Delta = 0$

alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double telle que $r = \dfrac{-b}{2a}$.

La solution générale de l'équation différentielle est : $y = (Ax + B)\mathrm{e}^{rx}\,;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

▷ troisième cas si $\Delta < 0$

alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 telles que $r_1 = \alpha - i\beta\,;\ r_2 = \alpha + i\beta$.

La solution générale de l'équation différentielle est : $y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}\,;$
$(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque

$ay''+by'+cy = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants sans second membre.

Exemple

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$a)$ $y'' + 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

$b)$ $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(0) = 4$ et $g'(0) = 2$.

$c)$ $h'' + \pi^2 h = 0\,;\ h(-x) + h(x) = 0$ et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

solution

Résolvons les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(o) = 3$ et $f'(0) = 1$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r - 3 = 0$.

On a : $\Delta = 16 \Longrightarrow r_1 = -3\,;\, r_2 = 1$

D'où $y = A\mathrm{e}^{-3x} + B\mathrm{e}^{x}\,;\, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- $f(0) = A + B = 3$ (1) car $f(x) = y$.
- $f'(0) = -3A + B = -1$ (2)

En faisant (1) − (2), on a : $A = 1$ et $B = 2$

D'où $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{x}}$

b) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(o) = 4$ et $g'(0) = 2$.

L'équation caractéristique est : $4r^2 - 4r + 1 = 0$.

On a : $\Delta = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

D'où $y = (Ax + B)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,;\, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- $g(0) = B = 4$ (1) car $g(x) = y$.
- $g'(0) = A + \dfrac{1}{2}B = 2$ (2)

En remplaçant (1) dans (2), on a : $A = 0$

D'où $\boxed{g(x) = 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$

c) $h'' + \pi^2 h = 0\,;\, h(-x) + h(x) = 0$ et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + \pi^2 = 0$.

On a : $r_1 = -i\pi\,;\, r_2 = i\pi$

D'où $h(x) = A\cos\pi x + B\sin\pi x\,;\, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- $h(-x) + h(x) = 0 \Longrightarrow 2A\cos\pi x = 0,\ A = 0$ car $\forall\ x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$; $\cos\pi x \neq 0$
- $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = B = 1$

D'où $\boxed{h(x) = \sin\pi x}$

1.5 Équation différentielle avec second membre

1.5.1 Résolution

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on peut utiliser le procédé suivant :

- Déterminer une solution particulier g de cette équation ;

• Démontrer que les solutions de l'équation différentielle avec second membres sont les fonctions φ du type : $\varphi = f + g$, où f est solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène).
• Résoudre l'équation différentielle sans second membre et en déduire les solutions l'équation différentielle avec second membre.

1.5.2 Équation différentielle de la forme : $ay' + by = c\cos(wt + \varphi)$ ou $ay' + by = c\sin(wt + \varphi)$

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2\cos x$.

1. Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = -\cos x + \sin x$ est solution de (E).
2. Démontrer φ est solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de (E') : $y' - y = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution

On donne $y' - y = 2\cos x$

1. Montrons que g solution de (E) :
   g est solution de $(E) \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) - g(x) = 2\cos x$
   On a : $g(x) = -\cos x + \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x + \sin x$
   En effet ; $g'(x) - g(x) = (\cos x + \sin x) - (-\cos x + \sin x)$
   $g'(x) - g(x) = 2\cos x$ Donc g est solution de (E).
2. Démontrons que φ solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de (E') : $y' - y = 0$
   φ est solution de $(E) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) - \varphi(x) = 2\cos x; \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
   $f = \varphi - g \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ $\varphi'(x) - \varphi(x) = 2\cos x \quad \Rightarrow$ $(f(x) + g(x))' + (f(x) + g(x)) = 2\cos x$
   or g est solution de $(E) \quad \Rightarrow \quad g'(x) - g(x) = 2\cos x$
   Donc $f'(x) - f(x) = 0$ f est donc solution de (E') : $y' - y = 0$.
   D'où $f(x) = k\mathrm{e}^x; \ \ k \in \mathbb{R}$

3. Déduisons-en toutes les solutions de (E).

   On a : $f(x) = \varphi(x) - g(x) \Longrightarrow \varphi(x) = f(x) + g(x)$.

   D'où $\varphi(x) = k\mathrm{e}^x - \cos x + \sin x$, $k \in \mathbb{R}$.

1.6 Équation différentielle de la forme : $y'' + y' + y = c\cos(wt+\varphi)$ ou $y'' + y' + y = c\sin(wt+\varphi)$

Exercice

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y = \sin 2x$.

1. Vérifier que la fonction $g(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x$ est solution de (E).
2. Démontrer que $f+g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' + 2y = 0$.
3. Résoudre l'équation (E').
4. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

Solution

1. Vérifions que la fonction $g(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x$ est solution de (E).

   $g(x)$ est solution de $(E) \Leftrightarrow g''(x) + 2g(c) = \sin 2x$.

   $g(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x$, $g'(x) = -\cos 2x$ et $g''(x) = 2\sin 2x$.

   $g''(x) + 2g(c) = \sin 2x = 2\sin 2x - \sin 2x = \sin 2x$

   D'où g est une solution de (E).

2. Démontrons que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' + 2y = 0$.

   On a : $(f+g)''(x) + 2(f+g)(x) = \sin 2x \Longrightarrow f''(x) + 2f(x) + g''(x) + 2g(x) = \sin 2x$

   Or g est solution de (E), alors $f''(x) + 2f(x) = 0$.

3. Résolvons l'équation (E').

   On a : $y_H = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)$ avec $(C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$

4. Déduisons-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

   $y_G = y_H + y_P \Longrightarrow y_G = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Exercice

1. Donner les solutions générales de chacune des équations différentielles suivantes : $a)$ $y'' - 4y' + 4y = 0$; $b)$ $y'' + 2y = 0$; $c)$ $y'' + y' - 2y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.