Table des matières

ALGÈBRES LINÉAIRES

1.1 Structure d'un espace vectoriel

1.1.1 Définition

On dit qu'un ensemble E non vide est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni de deux lois : une loi de composition interne notée $+$ appelée addition et l'autre de composition externe notée $\bullet$ appelée multiplication : vérifiant les propriétés suivantes :

$\triangleright$ **Addition** : $\begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \longmapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \end{cases}$

1. Associativité : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$; $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
2. Élément neutre : $\forall\ \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
3. Élément symétrique ou opposé : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \exists \overrightarrow{v}'$ tel que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$
4. Commutativité : $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$; $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$.

N.B : Ces propriétés font de $(E, +)$ un groupe commutatif ou Abélien.

$\triangleright$ **Multiplication** : $\begin{cases} \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, \overrightarrow{w}) \longmapsto \lambda\overrightarrow{w} \end{cases}$

5. Associativité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v} \in E, \lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}$
6. Élément neutre : $\forall \in E, 1.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$
7. Distributivité (1) : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v} \in E$; $(\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v}$
8. Distributivité (2) : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$; $\lambda(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{w}$

Remarque

Les éléments d'un espace vectoriel sont des vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ sont des scalaires.

Exemple

$(\mathbb{R}, +, \bullet)$; $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ sont des espaces vectoriels.

1.2 Sous espace vectoriel

1.2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous espace-vectoriel de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E.

Théorèmes

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel et F un sous ensemble de E.

F est un sous espace vectoriel de E si :

$a)$ $F \neq \varnothing$,

$b)$ $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$ (stabilité de la loi $(+)$),

$c)$ $\forall \overrightarrow{u} \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \overrightarrow{u} \in F$ (stabilité de la loi $(\bullet)$).

Théorèmes

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel et F un sous ensemble de E.

F est un sous espace vectoriel de E si :

$i)$ $F \neq \varnothing$,

$ii)$ $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in F.$

Remarque

Pour montrer que F est non vide, on peut montrer que l'élément neutre de la loi $(E, +)$ est contenu dans F

Activités

1. On donne l'ensemble D défini par : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$
   Montrer que l'ensemble D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. On donne l'ensemble P défini par : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$.
   Montrer que l'ensemble P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution

1. Montrons que l'ensemble (D) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
   $\triangleright$ $\overrightarrow{O}(0, 0) \in D$ car $0 + 0 = 0$
   D'où D est non vide
   $\triangleright$ Soit $\overrightarrow{u}(x, y) \in D$ et $\overrightarrow{u'}(x', y') \in D$
   On a : $(x + x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y') = 0$
   Donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in D$, D est stable par l'addition
   $\triangleright$ Soit $\overrightarrow{u}(x, y) \in D$ et $\lambda\mathbb{R}$.
   $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = 0 \Longrightarrow \lambda\overrightarrow{u} \in D$, D est stable par la multiplication par un scalaire.
   Par conséquent est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E

Définition

On appelle somme de F et G, et on note $F + G$, l'espace engendré par la famille des vecteurs de $F \cup G$ défini par : $F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{u} \in F, \overrightarrow{v} \in G\}$

1.2.3 Intersection, somme directe de deux sous-espaces

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition

L'intersection de F et G est l'ensemble défini par : $F \cap G = \{\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{u} \in G\}$.

Remarque

R_1 : Si $F \cap G = \{\overrightarrow{O}\}$, alors la somme est dite directe et on note : $F \oplus G$

R_2 : Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E.

Théorème

♠ La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

♠ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

1.3 Famille des vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

1.3.1 Combinaison linéaire

Définition

On appelle combinaison linéaire de n éléments de E, tout élément de E qui s'écrit sous la forme :

$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u}_i$ où les λ_i sont des scalaires et les $\overrightarrow{u}_i$ sont des vecteurs.

1.3.2 Famille génératrice

Définition

Une famille de vecteurs $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ de E est dite génératrice ou système générateur, si elle forme une combinaison linéaire de vecteurs de E.

1.3.3 Activités

1. Soit P l'ensemble défini par : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$

   Montrer que les vecteurs qui engendrent P forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer λ_1, λ_2 et λ_3 pour que le vecteur $\overrightarrow{v}(0, 1, 1)$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1(4, 0, 1)$, $\overrightarrow{v}_2(-2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v}_3(0, -1, 3)$.

1.3.4 Famille libre

La famille $F = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ est une famille libre d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E si $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n = 0$

Activité

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ définis par : $\overrightarrow{u}(-1;1)$, $\overrightarrow{v}(3;2)$

Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre.

Solution

Il s'agit de montrer que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre

1.3.5 Famille liée

La famille $F = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est liée s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$

Activité

Soit $\overrightarrow{u}(-1;\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{v}(-\sqrt{3};3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}$.

Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille liée.

Solution

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille liée s'il existe α et β non tous nuls tel que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta\sqrt{3} = 0 \\ -\alpha\sqrt{3} + 3\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha\sqrt{3} + 3\beta = 0 \\ -\alpha\sqrt{3} + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow -\alpha\sqrt{3} + 3\beta = 0$

Ainsi, pour $\beta = 1 \Longrightarrow \alpha = \sqrt{3}$, donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée

Théorème

Dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b,c)$, $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ et $\overrightarrow{w}(a'',b'',c'')$

$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille libre si $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \neq 0$

$$det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & b'' \end{vmatrix}$$

Ou bien :

$$det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a & a' & a'' & a & a' \\ b & b' & b'' & b & b' \\ c & c' & c'' & c & c' \end{array} \right.$$

Activité

Calculer le $dt(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, on donne $\overrightarrow{u}(1;2;-1)$, $\overrightarrow{v}(0;2;1)$ et $\overrightarrow{w}(-1;0;3)$

Solution

On a : $dt(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right. = 2$

Comme $dt(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \neq 0$, alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille libre.

Proposition

Une famille de vecteurs est liée si un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

1.4 Base et dimension

1.4.1 Base

La famille $F = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}$-espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice.

1.4.2 Théorème - définition d'une base

Si $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ est une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors toutes les bases de E ont même nombre d'éléments et ce nombre est appelé dimension de E.

Proposition

Si $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ est une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit de la manière unique $\overrightarrow{u} = (\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n})$

Dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\beta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

si $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ alors $\overrightarrow{u} = (2; -5; 4)$ dans la base $\beta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Remarque

R_1 : Si E se réduit à un singleton $\{\overrightarrow{0_E}\}$ alors $dimE = 0$

R_2 : L'équation d'une droite vectorielle dans le plan est de la forme $ax + by = 0$.
Dans l'espace elle est de la forme $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

R_3 : $dimE = 2$ ainsi E est appelé plan vectoriel

R_4 : $dimE = 3$ ainsi E est un espace vectoriel.

Propriétés de la dimension

P_1 : Si E est un espace vectoriel de dimension n alors toute famille libre a au plus n éléments.

P_2 : Si E est un espace vectoriel de dimension n toute famille libre a n éléments génératrice donc une base de E

p_3 : Si E est un espace vectoriel de dimension n, toute famille génératrice a n éléments est libre donc une base de E.

Théorème

T_1 : Tout espace vectoriel admet une infinité de base ayant le même nombre d'éléments (vecteurs)

T_2 : Tout vecteur d'un espace vectoriel E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de base de E.

1.5 Sous-espaces supplémentaires

Soit F et G les sous espaces vectoriels de E. F et G sont dits supplémentaires de E si

$$\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} dimF + dimG = dimE \\ F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \end{cases}$$

Activité

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne : $\overrightarrow{u} = (2,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (-1,0,1)$. Soit E_1 le sous ensemble de $\mathbb{R}$ tel que : $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}/x - 2y + z = 0\}$. et E_2, un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

1. Démontrer que E_1 est un un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille génératrice de E_1.
3. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre de E_1.
4. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

1.6 APPLICATIONS LINÉAIRES

1.6.1 Définition

Soit E et E deux sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Une application f de E dans F est dite linéaire si et seulement si :
$\triangleright\ \forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2\,;\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.
$\triangleright\ \forall\ \overrightarrow{u} \in E\,;\ \lambda\mathbb{R}\,;\ f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

1.6.2 Définition équivalente

Une application f E dans F est linéaire si et seulement si :
$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2\,;\ \forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\,;$ on a : $f(\alpha\overrightarrow{u}, \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.

1.6.3 Vocabulaire

a) Homomorphisme

Un homomorphisme est une application linéaire de E dans F.

b) Isomorphisme

Un isomorphisme est une application linéaire bijective de E dans F.

c) Endomorphisme

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E. $(E = F)$

d) Automorphisme

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Remarque

L'endomorphisme f de E est un automorphisme involutif si : $f \circ f = Id_E$

Exercice 1

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x; x + y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 1

Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Il s'agit de montrer que f est linéaire.
Soit $\overrightarrow{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2$; $\overrightarrow{v}(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$
f est linéaire $\Leftrightarrow$ $f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.
$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}(\alpha x + \beta a; \alpha y + \beta b)$
On a :
$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = f(\alpha x + \beta a; \alpha y + \beta b)$

$f(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v})=(\alpha x+\beta a;\alpha x+\beta a+\alpha y+\beta b)$

$f(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v})=(\alpha x;\alpha x+\alpha y)+(\beta a;\beta a+\beta b)=\alpha(x;x+y)+\beta(a;a+b)$

$f(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v})=\alpha f(\overrightarrow{u})+\beta f(\overrightarrow{v})\Longrightarrow f$ est linéaire

Conclusion : Comme f est linéaire et de plus f est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, alors f est un endomorphisme.

1.6.4 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E vers F.

a) Noyau de f

On appelle noyau de f noté $Kerf$, l'ensemble de vecteurs $\overrightarrow{u}$ de E qui ont pour image le vecteur $\overrightarrow{O}$ de F.
On a : $Kerf=\left\{\overrightarrow{u}\in E/f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{O}_F\right\}$

b) Image de f

On appelle Image de f noté Imf, l'ensemble de vecteurs $\overrightarrow{u'}$ de F qui ont au moins un antécédent $\overrightarrow{u}$ de E.
On a : $Imf=\left\{\overrightarrow{u'}\in F/f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u'}\right\}$

1.6.5 Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F. Le noyau et l'image de f sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $dimKerf+dimImf=dimE$.

Remarques

▷ Si f est injective, alors $Kerf=\left\{\overrightarrow{O}\right\}\Longrightarrow dimKerf=0$.
▷ Si f est surjective, alors $Imf=F\Longrightarrow dimImf=dimE$

1.6.6 Ensemble des vecteurs invariants par une application linéaire

On appelle vecteur invariant par un endomorphisme f, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}$.

On a : $Invf = \{\overrightarrow{u} \in E/f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$

1.6.7 Expression analytique d'une application linéaire

Soit f une application linéaire définie de E vers F.
Soit $\overrightarrow{u'}$ l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par f.
Écrire l'expression analytique de f, revient à écrire les coordonnées de $\overrightarrow{u'}$ en fonction de celle de $\overrightarrow{u}$, en utilisant la relation $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme f définie analytiquement par : $f : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$

1. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e}$.
2. Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e'}$.

Solution de l'exercice 1

1. Déterminons le noyau de f et en donnons une base $\overrightarrow{e}$.
   $Kerf = \left\{\overrightarrow{u} \in E/f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}\right\}$
   Posons $x' = 0$ et $y' = 0$
   $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x + y = 0$
   Le noyau de f est une droite vectorielle d'équation $x + y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
2. Déterminons l'image de f et en donnons une base $\overrightarrow{e'}$.
   $Imf = \left\{\overrightarrow{u'} \in F/f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}\right\}$
   $\begin{cases} x + y = x' \\ 2x + 2y = y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2x' \\ -2x - 2y = -y' \end{cases} \Longrightarrow 2x' - y' = 0$
   L'image de f est une droite vectorielle d'équation $2x - y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e'} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de E muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ tel que $f(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Déterminer l'expression analytique de f.

Solution de l'exercice 2

Déterminons l'expression analytique de f.
Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ son image par f.
Posons $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$
On a : $x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j})$
$x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = (-x+3y)\overrightarrow{i} + (x+4y)\overrightarrow{j}$
Par identification, on a : $\begin{cases} x' = -x+3y \\ y' = x+4y \end{cases}$

1.6.8 Matrice

Définition

On appelle matrice du type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ tout tableau A de $n.p$ éléments de $\mathbb{R}$ rangés sur n lignes et p colonnes.

N.B : Les lignes d'une matrice sont disposées horizontalement et les colonnes verticalement.

Ainsi : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{a2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

Exemple

$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ M est une matrice carrée d'ordre 2

1.6.9 Matrice d'une application linéaire

Définition

Soit f une application linéaire définie de E vers F, muni d'une base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$. On appelle matrice d'une application linéaire f relativement à la base B, la matrice dont les colonnes sont constituées des composantes des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$ dons cet ordre.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; l'endomorphisme f tel que : $\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \end{cases}$

a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; on considère l'endomorphisme f définie par :
$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \\ \mathcal{F}(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \end{cases}$ la matrice de f est : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.6.10 Autres types types de matrices

On distingue plusieurs types de matrices entre autres :

♣ matrice **uni-colonne** : $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

♣ matrice uni-ligne : $M = (a_1 \cdots a_n)$

♣ **matrice unitaire ou identité**

Une matrice est dite unitaire lorsque sur sa diagonale principale on ne trouve que des un (1) et de part et d'autre on a des zéros.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Une matrice M sera dite carrée lorsque $n = p$ c'est-à-dire le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.

$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad M$ est une matrice carrée d'ordre 2.

▷ Toutes les matrices unitaires sont des matrices carrées.

Exemples

⋆ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

⋆ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

1.7 Applications linéaires particulières

1.7.1 Projection vectorielle

a) Définition

Une application linéaire f de E dans F est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$.

b) Éléments caractéristiques

Toute projection vectorielle se caractérise par :

▷ La base : Ensemble des vecteurs invariants par f

On a : $B = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$

▷ La direction : L'ensemble des vecteurs qui ont pour image le vecteur nul.

On a : $D = \left\{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}\right\}$

1.7.2 Symétrie vectorielle

a) Définition

Une application linéaire f de E dans F est une symétrie vectorielle si et seulement si $f \circ f = Id_E$.

b) Éléments caractéristiques

Toute symétrie vectorielle se caractérise par :

▷ La base : Ensemble des vecteurs invariants par f

On a : $B = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$

▷ La direction : L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé.

On a : $D = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$

Exercices d'applications

Exercice 1

L'espace vectoriel E est muni d'une base $B = (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j})$.

Soit g un endomorphisme défini analytiquement par : $\begin{cases} x' = 5x + 10y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$

1. (a) Exprimer le vecteurs $g(\overrightarrow{i})$ et $g(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

   (b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme g dans la base $(\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j})$. .

   (c) g est-il un automorphisme de E ?

2. (a) Calculer $g \circ g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j})$.

   (b) En déduire la nature de l'endomorphisme g.

   (c) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

3. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base de E.

   (b) Exprimer $g(\overrightarrow{u})$ et $g(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

   (c) Donner la matrice P de g dans la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Exercice *2*

L'espace vectoriel E est muni d'une base $B = \left\{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right\}$.
On considère l'endomorphisme f de E tel que : $f \circ f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ et $f(\overrightarrow{i}) = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. (a) Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel E ?

   (b) Donner la dimension de l'espace vectoriel E notée dim$E$.

   (c) Qu'appelle-t-on automorphisme ?

2. (a) Exprimer le vecteur $f(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

   (b) Déterminer $f \circ f(\overrightarrow{j})$ puis en déduire la nature de l'endomorphisme f.

3. Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ deux vecteurs de l'espace E tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$.

   (a) Montrer que l'expression analytique de l'endomorphisme f est : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

   (b) En déduire la matrice M de l'endomorphisme f.

   (c) Vérifier que f est un automorphisme.

   (d) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

4. On considère les vecteurs $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base de E.

   (b) Exprimer $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

   (c) Donner la nouvelle matrice M' de f dans la base $(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$.

Exercice *3*

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau de f et en déduire une base $\overrightarrow{e_1}$.

3. Déterminer l'image de f et en déduire une base $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.

4. (a) Montrer que $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Écrire la matrice de f dans la base B.

5. Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1}(1,1,0,0)$; $\overrightarrow{u_2}(0,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u_3}(0,0,1,1)$.

1. Démontrer que la famille $F = \{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3}\}$ est une famille libre.
2. Soit $\overrightarrow{v}(x, y, z, t$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$, on suppose que $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{u_3}$. Trouver une relation entre les réels x, y, z et t.
3. Soit $\overrightarrow{w}(1,-1,1,3)$. Déduire de la relation obtenue au 2. que $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u}_1 + b\overrightarrow{u}_2 + c\overrightarrow{u}_3$.

Exercice 5

Sot $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan vectoriel E, f désigne l'endomorphisme de E tel que
$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \\ f(\overrightarrow{j}) = \dfrac{3}{4}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}). \end{cases}$$

1. Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. Déterminer l'expression analytique de f.
3. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e}_1$.
4. Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e}_2$.
5. Déterminer l'ensemble des vecteur invariant par f et en donner une base $\overrightarrow{e}_3$.
6. (a) Montrer que $B' = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de f dans la base B' ?
7. (a) Calculer $f \circ f(\overrightarrow{i})$ puis en déduire la nature de f.
   (b) Caractériser l'endomorphisme f.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 muni de sa base canonique $B = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et f un endomorphisme de E tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

1. (a) Montrer que $B' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   (b) En déduire la matrice P de f dans cette base.
   (c) Montrer que dans cette base f est un automorphisme.
2. (a) Déterminer $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   (b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme f.

(c) Déterminer l'expression analytique de l'endomorphisme f.

3. (a) Calculer $f \circ f(\overrightarrow{j})$.

(b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Solution de l'exercice 1

1. (a) Exprimons $g(\overrightarrow{i})$ et $g(\overrightarrow{j})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
On a : $\overrightarrow{u'} = g(\overrightarrow{u}) \Longrightarrow x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xg(\overrightarrow{i}) + yg(\overrightarrow{j})$
$(5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})x + (10\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j})y = xg(\overrightarrow{i}) + yg(\overrightarrow{j})$
Par identification, on a : $g(\overrightarrow{i}) = 5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $g(\overrightarrow{j}) = 10\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

(b) Déterminons la matrice M de l'endomorphisme g.
On a : $M = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(c) g n'est pas un automorphisme car $dtM_g = 0$

2. (a) Calculons $g \circ g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j})$.
On a : $g \circ g(\overrightarrow{i}) = g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j}) = g(\overrightarrow{j})$

(b) Nature de l'endomorphisme g.

Comment $g \circ g = g$, alors g est une projection vectorielle.

(c) Déterminons les éléments caractéristiques de g.

▷ Base de g

En posant $x' = x$ et $y' = y$, on trouve : $2x + 5y = 0$

D'où la base g est une droite vectorielle d'équation $2x + 5y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

▷ Direction de g

En posant $x' = 0$ et $y' = 0$, on trouve : $x + 2y = 0$

D'où la direction g est une droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e}' = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

3. On donne $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

(a) Montrons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base.

Comment $dt(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base.

(b) Exprimons $g(\overrightarrow{u})$ et $g(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On a : $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}$ et $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.

(c) Donnons la matrice P de g.

On a : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 2

1. (a) On appelle dimension d'un espace vectoriel E, le nombre d'éléments contenus dans une de ses bases.

   (b) Donnons la dimension de l'espace E.

   On a : $dimE = 2$.

   (c) On appelle automorphisme tout endomorphisme bijectif.

2. (a) Calculons $f(\overrightarrow{j})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

   On a : $f \circ f(\overrightarrow{i}) = -2f(\overrightarrow{i}) - f(\overrightarrow{j}) \Longrightarrow f(\overrightarrow{j}) = -2f(\overrightarrow{i}) - f \circ f(\overrightarrow{i})$

   D'où $f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

   (b) Déterminons $f \circ f(\overrightarrow{j})$ puis déduisons la nature de f.

   $f \circ f(\overrightarrow{j}) = 3f(\overrightarrow{i}) + 2f(\overrightarrow{j}) = 3(-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) + 2(3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$

   D'où $f \circ f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$.

   f est une symétrie vectorielle.

3. (a) Montrons que l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

   $x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j}) \Longrightarrow x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = (-2x + 3y)\overrightarrow{i} + (-x + 2y)\overrightarrow{j}$

   Par identification, on a : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

   (b) Déduisons-en la matrice de f

   On a : $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) vérifions que f est un automorphisme.

   Comme $dtM = -1$, alors f est un automorphisme.

   (d) Déterminons les éléments caractéristiques de f.

   ▷ Base de f

   En posant $x' = x$ et $y' = y$, on trouve : $x - y = 0$

   D'où la base f est une droite vectorielle d'équation $x - y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

▷ Direction de f

En posant $x' = -x$ et $y' = -y$, on trouve : $x - 3y = 0$

D'où la direction f est une droite vectorielle d'équation $x - 3y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e}' = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

4. On donne $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

   (a) Montrons que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base.

   Comment $dt(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base.

   (b) Exprimons $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

   On a : $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ et $f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$.

   (c) Donnons la nouvelle matrice M' de f.

   On a : $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$

1. Écrivons la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

   On a : $M_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Déterminons le noyau une base $\overrightarrow{e_1}$.

   Soit $\overrightarrow{u} \in Kerf$, alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}$

   On a : $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \ (1) \\ x - 2y + z = 0 \ (2) \\ x + y - 2z = 0 \ (3) \end{cases}$

   $(1) + 2 \times (2)$: $y - z = 0 \Longrightarrow y = z \ (4)$

   $(1) + 2 \times (3)$: $y - z = 0 \Longrightarrow y = z \ (5)$

   (2) $x = 2y - z \ (6)$

   (4) dans (6), $x = y = z$

   Le noyau de f est la droite vectorielle d'équation $x = y = z$ engendrée par $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

3. Déterminons l'image et une base $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.

   Soit $\overrightarrow{u}' \in Imf$, alors $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$

   On a : $\begin{cases} x' = -2x + y + z \ (1) \\ y' = x - 2y + z \ (2) \\ z' = x + y - 2z \ (3) \end{cases}$

   $(1) + (2) + (3) : x' + y' + z' = 0$

   L'image de f est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

4. (a) Montrons que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a : $det_B = 3$. Comme $det_B \neq 0$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Matrice de f dans la base B.

   On a $f(e_1) = \overrightarrow{0}$; $f(e_2) = -3e_2$ et $f(e_3) = -3e_3$

   D'où $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

5. Montrons que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

   $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $dimKerf + dimImf = dim\mathbb{R}^3$ et $det(e_1, e_2, e_3) \neq 0$. Alors la décomposition est unique.

   D'où $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.